514
W49u

THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
~~513.7~~ 514
W49u

MATHEMATICS
DEPARTMENT

Ueber die

Analysis situs mehrdimensionaler Räume.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Paul Wernicke,
Professor of Modern Languages
am State College of Kentucky zu Lexington, Kentucky, U. S. A.

Göttingen 1904.

Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner).

Tag der mündlichen Prüfung: 1. August 1904.

Referent: Herr Prof. Dr. H. Minkowski.

514
N49w

Die Analysis Situs ist die Invariantentheorie der Gruppe ein-eindeutiger reeller Transformationen von n Veränderlichen. Die Invarianten sind, geometrisch zu reden, die Figuren des n-dimensionalen Raumes, wenn homöomorphe unter denselben als nicht verschieden angesehen werden. Homöomorph heissen zwei geometrische Figuren, die durch stetige Deformation, d. h. ohne Trennung oder Einführung von Zusammenhängen, im zugrundegelegten Raume ineinander übergeführt werden können.

In neuerer Zeit hat H. Poincaré über die Analysis Situs höherer Räume folgende grundlegenden Abhandlungen veröffentlicht:

1) Analysis Situs, Journ. de l'École Polyt., sér. 2, 1895.

2) Complément à l'Analysis Situs, Proc. London Math. Soc. vol. 32, 1900.

3) Second complément à l'Analysis Situs, Rendic. Circ. mat. di Palermo, 1899.

4) Sur certaines surfaces algébriques, Bull. Soc. math. de France, 1902.

5) Sur les cycles des surfaces algébriques, Journ. de Math. s. 5, t. 8, 1902 [1]).

Auf Anregung des Herrn Professor Minkowski versuche ich in der vorliegenden Arbeit eine kurze Darstellung dieser Theorie zu geben. Sie wird in einen allgemeinen Teil und in ein Kapitel über vierdimensionale Gebilde zerfallen. Dabei soll die geometrische Sprechweise, deren Vorzüge in der Einleitung zur citierten Analysis Situs von 1895 hervorgehoben werden [2]), durchweg zur Anwendung kommen.

1) Dazu ist nach Abschluss dieser Arbeit noch gekommen: Cinquième complément à l'Analysis Situs, Rendic. Circ. mat. di Palermo, 1904.

2) Le langage géométrique „est plus concis" ... „l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles".

279690

Aus diesem Grunde wurde eine Indicatrix geometrisch definiert und der gegenseitigen Lage der „complementären“ und „dualen“ Gebilde des Raumes $\mathfrak{R}_n$ besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Es stellt sich dabei heraus, dass sich für geschlossene Flächen aller Art und in jedem Raume Inneres und Aeusseres definieren lässt, falls man die zu ihnen „dualen“ Ebenen als Elemente des Raumes $\mathfrak{R}_n$ betrachtet. Auch das „Ineinandergreifen“, wie es z. B. bei den Gliedern einer Kette stattfindet, und die „Verknotung“ zeigen sich einer allgemeineren Fassung fähig. Unter Benutzung dieser Untersuchungen fällt schliesslich der Beweis des Hauptsatzes über die Betti'schen Zahlen besonders kurz und einfach aus (§ 14).

Allerdings sind in der vorliegenden Arbeit vor diesen geometrischen Fragen der reinen Analysis Situs die specieller algebraischen Untersuchungen von Poincaré zurückgetreten.

Erster Teil.

Der n-dimensionale Raum $\mathfrak{R}_n$.

§ 1. Aufstellung p-dimensionaler Gebilde im Raume $\mathfrak{R}_n$.

1. Die Punkte $\mathfrak{x}$ des n-dimensionalen Raumes $\mathfrak{R}_n$ seien durch die verschiedenen Wertsysteme der n Veränderlichen x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, ihrer Coordinaten, definiert. Ist demnach die Mächtigkeit der als Räume $\mathfrak{R}_n$ definierten Punktmengen für $n = 1, 2, \ldots$ nicht verschieden (cf. Cantor, Journ. f. Math. 84), so liegt das Wesen des $\mathfrak{R}_n$ in der n-fach stetigen Anordnung seiner Punkte. Ob in dieser Ordnung ein Punkt einem anderen vorangeht oder auf ihn folgt, entscheidet man z. B. nach der Grösse ihrer resp. Coordinaten x_i, nachdem man über die Reihenfolge, in der diese zu berücksichtigen sind, eine willkürliche Festsetzung getroffen hat.

2. Beschränkt man die Veränderlichkeit der Coordinaten, indem man sie zu Funktionen der Parameter:

$$u_j \qquad (j = 1, 2 \ldots p)$$

macht, wobei $p < n$ sei, so ergibt sich eine p-dimensionale Fläche:

$$\mathfrak{F}_p\colon \quad x_i = x_i(u_1, u_2 \ldots u_p) \qquad (i = 1, 2 \ldots n),$$

wovon man durch Grenzbedingungen für die Parameter ein Flächenstück:

$$\mathfrak{S}_p\colon \quad x_i = x_i(u_1 \ldots u_p), \quad \varphi_k(u_1 \ldots u_p) > 0 \quad (k = 1, 2, 3 \ldots)$$

ausschneidet.

Die Grenzbedingungen φ_k wählen wir stets so, dass auf $\mathfrak{S}_p$ keine Singularitäten der Fläche $\mathfrak{F}_p$ vorkommen. Auch die aus der Zusammensetzung von Flächenstücken entstehenden singularitätenfreien Gebilde werden wir kurz als „Flächen“ bezeichnen.

Grenzflächen von $\mathfrak{S}_p$ sind diejenigen Flächenstücke $\mathfrak{S}_{p-1}$, die aus den Gleichungen und Ungleichungen von $\mathfrak{S}_p$ durch Verwandlung je einer Ungleichung in eine Gleichung hervorgehen, z. B.:

$$\mathfrak{S}^{(4)}_{p-1}: \quad x_i = x_i(u_1 \dots u_p), \quad \varphi_4(u_1 \dots u_p) = 0, \quad \varphi_k(u_1 \dots u_p) > 0$$
$$(\text{für } k = 1, 2, 3, 5, 6 \dots).$$

3. Fallen für eine Fläche die Grenzbedingungen weg, ohne dass auf ihr Punkte mit unendlich grossen Coordinaten vorkommen, so nennen wir sie geschlossen.

Hier werden fast nur solche geschlossenen Flächen vorkommen, die sich nicht selbst durchsetzen, und die wir daher als „einfache" geschlossene Flächen bezeichnen können. — Sind im Vorstehenden die p-dimensionalen geschlossenen Flächen nur für $p > 0$ definiert, so wird es sich herausstellen, dass im Grenzfalle $p = 0$ das Punktepaar — welches ja auch das geschlossene Linearcontinuum in zwei Teile trennt — die geschlossene $\mathfrak{F}_0$ vertritt.

§ 2. Indicatrix.

4. Durch jeden Punkt in $\mathfrak{S}_p$ gehen p Parametercurven

$$s_j: \quad \begin{matrix} u_1 = \text{const.}, \; u_2 = \text{const.} \dots u_{j-1} = \text{const.}, \\ u_{j+1} = \text{const.} \dots u_p = \text{const.}, \end{matrix}$$

längs denen sich nur je ein Parameter u_j ändert. Mit ds_j bezeichnen wir eine infinitesimale Verschiebung längs einer solchen Curve in der Richtung, in der u_j wächst $\left(\frac{ds_j}{du_j} > 0\right)$. Von den p derart für jeden Punkt $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{S}_p$ festgelegten Richtungen sind keine drei in einer Ebene, keine vier in einem $\mathfrak{R}_3$ usw.

Wir verschaffen uns nun für den Punkt $\mathfrak{x}$ in[1]) $\mathfrak{S}_p$ ein rechtwinkliges Axenkreuz, das wir Indicatrix des Flächenstückes $\mathfrak{S}_p$ im Punkte $\mathfrak{x}$ nennen. Seine erste Axe (die r_1-Axe) falle in die Richtung ds_1. Durch diese und ds_2 legen wir eine Ebene und nehmen darin die r_2-Axe senkrecht zu ds_1 und so, dass sie mit ds_2 den kleinsten Winkel bildet. Zur r_3-Axe nehmen wir in dem durch ds_1, ds_2, ds_3 bestimmten $\mathfrak{R}_3$ diejenige zu ds_1 und ds_2 gemeinsame senkrechte Richtung, die mit ds_3 den kleinsten Winkel bildet, usw. nach dem Schema:

1) In $\mathfrak{S}_p$ soll heissen, dass die benutzten Richtungen sämmtlich dem $\mathfrak{S}_p$ (tangential in $\mathfrak{x}$) angehören müssen.

Axe	senkrecht auf	Sinn bestimmt nach
r_1		ds_1
r_2	ds_1	ds_2
r_3	ds_1, ds_2	ds_3
⋮	⋮ ⋮	⋮
r_{p-1}	$ds_1, ds_2 \ldots ds_{p-2}$	ds_{p-1}
r_p	$ds_1, ds_2, \ldots ds_{p-2}, ds_{p-1}$	ds_p

5. Rechte und linke Indicatrix. Zwei Indicatrices sollen als gleich gelten, wenn man die Axen der einen in $\mathfrak{S}_p$ unter Wahrung ihrer Rechtwinkligkeit durch stetige Bewegung mit denen der anderen zur Deckung bringen kann, so dass die positiven Richtungen r_j übereinstimmen. Dieses lässt sich ohne weiteres für $p-1$ Axen ausführen, da man dazu für die erste Axe einen $\mathfrak{R}_p$, für die zweite einen $\mathfrak{R}_{p-1}$, usw., schliesslich für die $p-1$te eine Ebene zur Verfügung hat. Die $p$ten Axen liegen dann aber auf einer Geraden fest und lassen sich, falls sie entgegengesetzt gerichtet sind, nicht mehr gleich richten. Es gibt daher zwei symmetrische, nicht congruente Arten der Indicatrix, die wir in beliebiger Festsetzung als rechte und linke Indicatrix bezeichnen.

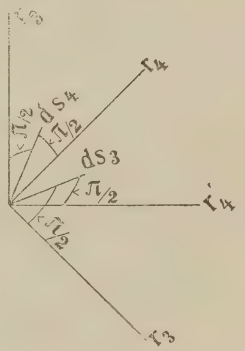

Fig. 1.

Vertauscht man zwei Parameter, z. B. u_3 und u_4, so dass ds_3 und ds_4 in der Construction die Rollen tauschen, und bezeichnet die neuen Axen mit Strichen, so zeigt die Tabelle, dass nur in der Ebene r_3, r_4 eine Veränderung vorgegangen ist (s. beistehende Figur, auf der r_3, r_4, r_3' und r_4' in der Zeichenebene liegen); r_3' steht jetzt senkrecht zu ds_3, r_4' zu ds_4. In dem Dreikant ds_3, r_3', r_4' ist

$$\sphericalangle(ds_3, r_3) < \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle(ds_3, r_4') < \frac{\pi}{2},$$

folglich $\sphericalangle(r_3, r_4') < \pi$, ebenso $\sphericalangle(r_3', r_4) < \pi$, woraus man erkennt, dass der Drehungssinn von r_3 nach r_4 dem von r_3' nach r_4' entgegengesetzt ist.

Da jede Vertauschung zweier u_j sich aus einer ungeraden Anzahl von Vertauschungen benachbarter u_j herstellen lässt, so

gilt der Satz: Bei Vertauschung zweier Parameter kehrt sich die Indicatrix um.

§ 3. Analytische Fortsetzung der Flächenstücke.

6. Von den $x_i(u)$ nehmen wir jetzt an, sie seien analytische Funktionen, deren Singularitäten nicht auf $\mathfrak{S}_p$ fallen, und deren Funktionaldeterminanten $\frac{\partial(x)}{\partial(u)}$, nämlich die p-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1,p} & x_{2,p} & \dots & x_{n,p} \end{vmatrix}, \quad \left(\text{wo } x_{ij} \text{ für } \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \text{ gesetzt ist}\right),$$

auf $\mathfrak{S}_p$ nicht sämtlich verschwinden.

Haben zwei so definierte Flächenstücke:

$$\mathfrak{S}_p^{\mathrm{I}}: \quad x_i = x_i^{\mathrm{I}}(u_1 \dots u_p), \quad \varphi_k^{\mathrm{I}}(u_1 \dots u_p) > 0;$$
$$\mathfrak{S}_p^{\mathrm{II}}: \quad x_i = x_i^{\mathrm{II}}(v_1 \dots v_p), \quad \varphi_k^{\mathrm{II}}(v_1 \dots v_p) > 0$$

einen gemeinsamen p-dimensionalen Teil $\mathfrak{T}_{(\mathrm{I,II})}^1$, so werden darin vermöge der n Gleichungen:

$$x_i^{\mathrm{I}}(u_1 \dots u_p) = x_i^{\mathrm{II}}(v_1 \dots v_p)$$

die v_j eindeutige Funktionen der u_j, deren Funktionaldeterminante $\frac{\partial(v)}{\partial(u)}$ innerhalb $\mathfrak{T}_{(\mathrm{I,II})}^1$ ihr Zeichen nicht ändert. Unter Anwendung von p der Gleichungen wird nämlich:

$$\frac{\partial(v)}{\partial(u)} = \frac{\partial(x)}{\partial(u)} : \frac{\partial(x)}{\partial(v)}.$$

Die rechts im Zähler und Nenner stehenden Determinanten haben endliche Werte. Durch Wahl der Gleichungen können wir es erreichen, dass entweder der Zähler oder der Nenner von Null verschieden wird, und wir erkennen daraus, dass $\frac{\partial(v)}{\partial(u)}$ weder Null noch unendlich wird. Diese Funktionaldeterminante kann also auch nicht in $\mathfrak{T}_{(\mathrm{I,II})}^1$ ihr Zeichen ändern.

Indem wir die Coordinaten in $\mathfrak{S}_p^{\mathrm{II}}$ nun als Funktionen der u_j schreiben:

$$\mathfrak{S}_p^{II}: \quad x_i = x_i(u_1 \dots u_p), \quad \varphi_k(u_1 \dots u_p) = 0,$$

machen wir $\mathfrak{S}_p^{II}$ zur Fortsetzung von $\mathfrak{S}_p^{I}$.

7. Verhalten der Indicatrix in der Fortsetzung $\mathfrak{S}_p^{II}$. Construieren wir für den Punkt $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{S}_p^{II}$ die Indicatrix einmal unter Zugrundelegung der Parameter u_j, dann ein zweites Mal unter Verwendung der v_j, benutzen diese Indicatrices als Coordinatensysteme und nennen die Coordinaten eines Punktes im ersten Systeme r_j, im zweiten Systeme r_j', so wird im Punkte $\mathfrak{x}$:

$$\frac{\partial r_j}{\partial u_k} = 0, \quad \frac{\partial r_j'}{\partial v_k} = 0, \quad \text{wenn } j > k,$$

da $r_j \perp ds_k$, $r_j' \perp ds_k'$ nach dem Schema pag. 7,

$$\frac{\partial r_j}{\partial u_j} = l \cos(r_j\, ds_j), \quad \frac{\partial r_j'}{\partial v_j} = l' \cos(r_j'\, ds_j),$$

wo l, l' positive Faktoren sind, nämlich

$$l = \frac{\partial s_j}{\partial u_j}, \quad l' = \frac{\partial s_j'}{\partial v_j},$$

also

$$\frac{\partial(r)}{\partial(u)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u_1} & \frac{\partial r_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u_1} & \frac{\partial r_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial r_2}{\partial u_p} \\ \frac{\partial r_p}{\partial u_1} & \frac{\partial r_p}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial r_p}{\partial u_p} \end{vmatrix} = L \cdot \begin{vmatrix} \cos(r_1\, ds_1) & \frac{\partial r_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial u_p} \\ 0 & \cos(r_2\, ds_2) & \dots & \frac{\partial r_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & \cos(r_p\, ds_p) \end{vmatrix}$$

$$= L \cos(r_1\, ds_1) \cos(r_2\, ds_2) \dots \cos(r_p\, ds_p) > 0,$$

da $L > 0$ ist und die Winkel hier $< \frac{\pi}{2}$ sind, ebenso:

$$\frac{\partial(r')}{\partial(v)} = L' \cos(r_1'\, ds_1') \cos(r_2'\, ds_2') \dots \cos(r_p'\, ds_p') > 0.$$

Drückt man noch vermöge einer orthogonalen Transformation die Coordinaten r durch die r' aus, so wird $\frac{\partial(r)}{\partial(r')} = \pm 1$, je nachdem die als Coordinatensysteme benutzten Indicatrices gleich- oder ungleichnamig sind. Mit $\frac{\partial(r)}{\partial(r')}$ zugleich ist aber auch $\frac{\partial(v)}{\partial(u)}$ positiv bez. negativ, weil

$$\frac{\partial(v)}{\partial(u)} = \frac{\partial(r)}{\partial(u)} : \frac{\partial(r)}{\partial(v)} = \frac{\partial(r)}{\partial(u)} : \left(\frac{\partial(r')}{\partial(v)} \; \frac{\partial(r)}{\partial(r')}\right)$$

ist. Es ergibt sich der Satz:

Die im Punkte $\mathfrak{x}$ unter Benutzung der Parameter u resp. v construierten Indicatrices fallen gleich oder entgegengesetzt aus, je nachdem die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(v)}{\partial(u)}$ im Punkte $\mathfrak{x}$ positiv oder negativ ist.

§ 4. Gebilde $\mathfrak{G}_p$. Ein- und Zweiseitigkeit.

8. Wie $\mathfrak{S}_p^{\mathrm{II}}$ als Fortsetzung von $\mathfrak{S}_p^{\mathrm{I}}$ in den Parametern u geschrieben wurde, so lassen sich weitere Stücke $\mathfrak{S}_p^{\mathrm{III}}, \mathfrak{S}_p^{\mathrm{IV}}, \ldots$ an die bereits in den u ausgedrückten anschliessen, falls sie mit letzteren irgend welche Teile $\mathfrak{T}^k_{(\mathrm{I,II})}, \mathfrak{T}^k_{(\mathrm{II,III})} \ldots$ gemein haben. Hierdurch entsteht ein p-dimensionales Gebilde $\mathfrak{G}_p$, dessen Punkte durch die u eindeutig festgelegt werden.

Hat nun bei jedem neuen Anschlusse $\frac{\partial(v)}{\partial(u)}$ in allen Teilen $\mathfrak{T}$, welche die neue Fortsetzung $\mathfrak{S}_p$ mit dem bereits von den Parametern u beherrschten Gebiete gemein hat, dasselbe Vorzeichen, so können wir (z. B. durch Vertauschung zweier v_j) dafür sorgen, dass es positiv ausfällt. Bildet man dann die Indicatrix für einen Punkt von $\mathfrak{G}_p$ und ist dieselbe eine rechte, so kann sie sich auf keinem stetig geschlossenen Wege in $\mathfrak{G}_p$ in eine linke verwandeln. Für denselben Ausgangspunkt erhält man bei Vertauschung zweier u eine linke Indicatrix, die ihrerseits diesen Charakter auf stetigen Wegen beibehält. Gebilde der beschriebenen Art heissen zweiseitig.

Hat dagegen $\frac{\partial(v)}{\partial(u)}$ einmal beim Anschluss eines neuen $\mathfrak{S}_p$ in zwei Teilen $\mathfrak{T}$ verschiedenes Vorzeichen, so wird sich die mittels der u construierte Indicatrix auf geschlossenem Wege, der durch diese beiden Teile $\mathfrak{T}$ führt, umkehren. In diesem Falle heisst das Gebilde $\mathfrak{G}_p$ einseitig.

9. Beispiele zweiseitiger Gebilde sind:

1) n-dimensionale Stücke des Raumes $\mathfrak{R}_n$.

2) 1-dimensionale Curven. Bei diesen vertritt der „Sinn“ die „Seite“.

3) Die Flächenstücke $\mathfrak{S}_p$ selbst, und die Flächen $\mathfrak{F}_p$, insofern man deren Singularitäten durch Umhüllungsflächen niederer Dimension ausschliesst.

Beispiele einseitiger Gebilde:

1) Das bekannte Moebius'sche Blatt, das im $\mathfrak{R}_3$ aus einem Rechteck gebildet werden kann, dessen Seiten in beistehender Figur als Stäbe, die mit Endringen ineinandergreifen, gezeichnet sind. Es soll $a'b'$ um π gedreht und dann durch Biegung der langen Seiten mit ba zur Deckung gebracht werden. Ein Stück Zeug, das in den Rahmen eingespannt wurde, bildet dann das Moebius'sche Blatt.

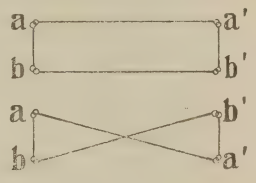

Fig. 2.

2) Analog kann man die Kanten eines Parallelepipeds aus Stäben herstellen und die Seitenfläche $a'b'd'c'$ (s. Figur) so verdrehen, dass sie die früher gegen $abdc$ gekehrte Fläche nach aussen wendet. Im Raume $\mathfrak{R}_4$ wird dann unter Biegung der Stäbe aa', bb', cc', dd' diese Fläche mit $cdba$ zur Coincidenz zu bringen sein, wobei dann eingespanntes plastisches Material eine einseitige dreidimensionale Fläche bildet.

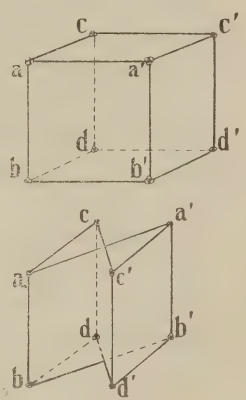

Fig. 3.

Um zweiseitige Gebilde handelt es sich stets, wenn dieselben durch analytische Gleichungen zwischen den Coordinaten nebst Grenzbedingungen gegeben sind:

$$u_j(x_1 \dots x_n) = 0, \quad \psi_k(x_1 \dots x_n) > 0,$$
$$j = p+1, \quad p+2, \dots n,$$

wo die u innerhalb der angegebenen Grenzen singularitätenfreie analytische Funktionen sind. Denn dieses ist nur eine andere Schreibweise für die „Flächenstücke“ $\mathfrak{S}_p$.

§ 5. Complementäre Gebilde.

10. Im Raume $\mathfrak{R}_n$ sollen solche Gebilde zu einander complementär heissen, deren Dimensionen sich zu n ergänzen:

$$\mathfrak{G}_p: \quad x_i = x_i(u_1 \dots u_p), \quad \varphi_k(u_1 \dots u_p) > 0,$$
$$\mathfrak{G}'_{n-p}: \quad x'_i = x'_i(u_{p+1} \dots u_n), \quad \varphi'_i(u_{p+1} \dots u_n) > 0, \qquad (i = 1, 2 \dots n).$$

Bilden wir für einen Punkt $\mathfrak{x}$ aus $\mathfrak{G}_p$ und einen Punkt $\mathfrak{x}'$ aus $\mathfrak{G}'_{n-p}$ die Determinante:

$$\Delta(x, x') = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,1} & \dots & x_{n,1} \\ x_{1,2} & x_{2,2} & \dots & x_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1,p} & x_{2,p} & \dots & x_{n,p} \\ x'_{1,p+1} & x'_{2,p+1} & \dots & x'_{n,p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x'_{1,n} & x'_{2,n} & \dots & x'_{n,n} \end{vmatrix},$$

wo

$$x_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}, \quad x'_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial u_j}$$

ist, so kehrt sich deren Vorzeichen bei Vertauschung zweier Parameter u_j um, ob nun dieselben aus der Reihe der p ersten oder der $n-p$ letzten genommen wurden.

$\mathfrak{G}_p$ und $\mathfrak{G}'_{n-p}$ können sich in einzelnen Punkten schneiden. Erfolgt der Schnitt in mehrdimensionalen Gebilden, so wollen wir es durch stetige Deformation von $\mathfrak{G}'_{n-p}$ im Raume $\mathfrak{R}_n$ dahin bringen, dass nur einzelne Schnittpunkte vorkommen. Liegt ein solcher Schnittpunkt $\mathfrak{c}$ vor, so hat in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathfrak{c}$ die Determinante $\Delta(x, x')$ für alle Paare $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ aus einem Punkte $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{G}_p$ und einem Punkte $\mathfrak{x}'$ von $\mathfrak{G}'_{n-p}$ dasselbe Vorzeichen. Denn erstens wird diese Determinante dort nicht unendlich wegen der Bestimmtheit der Parameterlinien daselbst, zweitens verschwindet sie nicht in beliebig kleiner Umgebung von $\mathfrak{c}$, sonst führten die Gleichungen:

$$0 = dx_i - dx'_i = x_{i1}du_1 + x_{i2}du_2 + \dots + x_{ip}du_p - x'_{i,p+1}du_{p+1} \dots - x'_{in}du_n \qquad (i = 1 \dots n)$$

zu einer Beziehung zwischen der Parameterreihe $u_1 \dots u_p$ und der Parameterreihe $u_{p+1} \dots u_n$, der mindestens eine Schnittlinie von $\mathfrak{G}_p$ und $\mathfrak{G}'_{n-p}$ entspräche. Je nachdem die Determinante positiv oder negativ ist, schreiben wir:

$$\operatorname{sign} \Delta(x, x') = \pm 1.$$

11. Im Gebilde $\mathfrak{G}_p$ hat eine infinitesimale Fortschreitung von dem Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ aus die Componenten

$$dx_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}du_j = \sum_{j=1}^{p} (-x_{ij})(-du_j).$$

Einer Umkehr der Richtungen aller Axen der Indicatrix auf $\mathfrak{G}_p$, was wir als Umkehr des Fortschreitungssinnes auf $\mathfrak{G}_p$

bezeichnen wollen, entspricht also ein Zeichenwechsel der Elemente in der Matrix der ersten p Reihen von $\Delta(x, x')$. Die p-reihigen Determinanten dieser Matrix wechseln das Zeichen aber nur, wenn p ungerade ist. Dieselbe Betrachtung gilt für die Umkehr der Richtungen aller Axen der Indicatrix auf $\mathfrak{G}'_{n-p}$. Betrachtet man simultan eine Indicatrix in $\mathfrak{G}_p$ und eine Indicatrix in $\mathfrak{G}'_{n-p}$ vom Schnittpunkte $\mathfrak{c}$ aus, — die letztere Indicatrix bezeichnen wir als Seite von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{R}_n$ —, so kann man bei ungeraden p und $n-p$ durch die Forderung des positiven Zeichens für die Determinante $\Delta(x, x')$ einen Zusammenhang zwischen der Indicatrix auf $\mathfrak{G}_p$ und der Seite von $\mathfrak{G}_p$ in $\mathfrak{R}_n$ herstellen. Soll nämlich die Determinante positiv bleiben, während man auf $\mathfrak{G}_p$ die Indicatrix umkehrt, so muss man dasselbe auch in $\mathfrak{G}'_{n-p}$ tun.

So hat eine Gerade in der Ebene bei bestimmtem Sinne eine rechte und linke Seite, die sich zugleich mit dem Sinne vertauschen. Im Raume $\mathfrak{R}_3$ findet dies nicht statt. Dagegen ist das Analogon im $\mathfrak{R}_4$, dass man auf der betr. Geraden 3 Lote errichten kann, die auch zu einander orthogonal sind und ein Rechtssystem bilden. Die negativen Richtungen dieser Lote bilden dann ein Linkssystem und entsprechen zugleich der Umkehr des Sinnes der Geraden. Der nächste Abschnitt giebt hierüber weitere Auskunft.

§ 6. Duale Gebilde.

12. Zu einander dual heissen Gebilde, deren Dimensionszahlen $n-1$ zur Summe geben, also wenn wir die Grenzbedingungen hinzudenken:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{G}_p: && x_i = x_i(u_1 \quad \dots u_p), \\ &\mathfrak{G}''_{n-1-p}: && x''_i = x''_i(u_{p+1} \dots u_{n-1}), \end{aligned} \qquad (i = 1, \dots n).$$

Zunächst erzeuge eine zu $\mathfrak{G}_p$ duale Ebene des Raumes $\mathfrak{R}_n$

$$\mathfrak{E}''_{n-1-p}: \quad x''_j = a_i + \sum a_{ij} u_j \qquad \begin{pmatrix} i = 1 \dots n \\ j = p+1 \dots n-1 \end{pmatrix},$$

wo die a_i, a_{ij} Constanten sind, durch Bewegung, indem sich einer ihrer Punkte längs einer u_n-Parameterlinie im Sinne wachsender u_n (im positiven Sinne) verschiebt, eine zu $\mathfrak{G}_p$ complementäre Fläche $\mathfrak{F}'_{n-p}$. Dieselbe schneide $\mathfrak{G}_p$ nur in einzelnen Punkten. In der Nähe eines solchen Schnittpunktes $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$ ändert sich das Zeichen von

$$\Delta(x, x') = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1,p} & \dots & x_{n,p} \\ a_{1,p+1} & \dots & a_{n,p+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n-1} & \dots & a_{n,n-1} \\ x''_{1,n} & \dots & x''_{n,n} \end{vmatrix},$$

wenn wir u_n so ändern, dass der positive Sinn der Parameterlinie der entgegengesetzte wird, und können wir danach sagen, $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ gelange beim Passieren des Schnittpunktes auf die andere Seite von $\mathfrak{G}_p$. Die Seiten von $\mathfrak{G}_p$ bezeichnen wir entsprechend der Aenderung derjenigen Indicatrix, wofür $\operatorname{sign} \Delta(x, x') = 1$ ist, wieder als rechte und linke, wobei wir uns auf eine hinreichend kleine Umgebung des betrachteten Schnittpunktes $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$ zu beschränken haben.

13. Innerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}'$ unterscheiden wir das Verhalten der Gebilde den zu ihnen dualen Ebenen gegenüber folgendermassen:

1) p ungerade, $n-1-p$ ungerade: Umkehr des Fortschreitungssinnes auf $\mathfrak{G}_p$ ändert $\operatorname{sign} \Delta(x, x')$, Umkehr der Indicatrix, oder, da $n-1-p$ ungerade ist, des Fortschreitungssinnes auf $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ stellt es wieder her. Daher bleiben die rechte und linke Seite von $\mathfrak{G}_p$ als solche erhalten, wenn man zur Belassung des Wertes von $\operatorname{sign} \Delta(x, x')$ übereinkommt, mit der Umkehr des Fortschreitungssinnes auf $\mathfrak{G}_p$ die Umkehr des Fortschreitungssinnes auf $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ zu verbinden. Uebrigens kann sich der Punkt $\mathfrak{x}'$ bei Aufstellung von $\operatorname{sign} \Delta(x, x')$ auf einer dem Schnittpunkte hinreichend benachbarten $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ von demselben beliebig entfernen.

Beispiel: Eine Kreislinie im $\mathfrak{R}_3$. Die dualen Geraden des Raumes kehren ihren Sinn mit dem Drehungssinn auf dem Kreise um. Dieses gilt hier zunächst für die Geraden einer Cylinderfläche in der Nähe eines Schnittpunktes der Fläche mit dem Kreise. Die Geraden zur linken Seite der den Kreis treffenden Erzeugenden liegen bei einer Umkreisungsrichtung im Inneren (s. u.), bei der anderen im Aeusseren des Kreises. Dabei ergibt sich die bekannte Beziehung zwischen Drehungs- und Fortschreitungssinn der Schraube.

2) p ungerade, $n-1-p$ gerade: Da Umkehr des Fortschreitungssinnes auf den $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ keinen Einfluss auf $\operatorname{sign} \Delta(x, x')$ hat, so vertauscht sich für $\mathfrak{G}_p$, wenn man darauf den Fortschreitungssinn umkehrt, die rechte mit der linken Seite; man

müsste denn, was wir hier nicht tun, die $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ des $\mathfrak{R}_n$ doppelt rechnen, einmal mit rechter und einmal mit linker Indicatrix.

Beispiele: Eine Kreislinie in der Ebene $\mathfrak{R}_2$. Hier werden die $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ zu Punkten. Die linke Seite liegt bei einer Umkreisungsrichtung im Inneren, bei der anderen im Aeusseren des Kreises. — Eine Kreislinie im $\mathfrak{R}_4$, welche Ebenen umfasst (was sie dort in demselben Sinne kann, wie ein Faden ein Bündel Stäbe umfasst).

3) p gerade, $n-1-p$ ungerade: Umkehr des Fortschreitungssinnes auf $\mathfrak{G}_p$ ist ohne Einfluss auf sign $\Delta(x, x')$. Die $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ in der Nähe eines Schnittpunktes werden, ob man auf ihnen den einen oder anderen Sinn festsetzt, auf dieselbe Weise in solche geschieden, die zu $\mathfrak{G}_p$ rechts und links liegen.

Beispiele: Ein Punktepaar $\mathfrak{G}_0$ in der Ebene $\mathfrak{R}_2$ mit den dasselbe trennenden resp. nichttrennenden Geraden $\mathfrak{E}_1$. — Eine Geraden $\mathfrak{E}_1$ umfassende Kugelfläche $\mathfrak{G}_2$ im $\mathfrak{R}_4$.

4) p und $n-1-p$ gerade: Weder auf $\mathfrak{G}_p$ noch auf den $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ hat die Umkehr des Fortschreitungssinnes Einfluss auf sign $\Delta(x, x')$.

Beispiele: Eine Punkte $\mathfrak{E}_0$ einschliessende Kugelfläche $\mathfrak{G}_2$ im $\mathfrak{R}_3$. — Ein Punkte umfassendes Punktepaar auf einer Geraden $\mathfrak{R}_1$. — Ein Punktepaar $\mathfrak{G}_0$ mit den dasselbe trennenden oder nichttrennenden Ebenen $\mathfrak{E}_2$ im Raume $\mathfrak{R}_3$. — Eine Ebenen $\mathfrak{E}_2$ umfassende Kugelfläche $\mathfrak{G}_2$ im $\mathfrak{R}_3$.

§ 7. Inneres und Aeusseres.

14. Ist das Gebilde $\mathfrak{G}_p$ geschlossen, wie es in obigen Beispielen der Fall ist, so giebt es Ebenen $\mathfrak{E}'_{n-p}$, die es nicht schneiden. Kann eine zu $\mathfrak{G}_p$ duale Ebene $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$, ohne unterwegs $\mathfrak{G}_p$ zu treffen, in eine solche $\mathfrak{G}_p$ nicht schneidende $\mathfrak{E}'_{n-p}$ hineinbewegt werden, so heisse sie eine zu $\mathfrak{G}_p$ äussere Ebene $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$, sonst eine zu $\mathfrak{G}_p$ innere. Die Gesamtheit der zu $\mathfrak{G}_p$ äusseren $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ nennen wir kurz das „Aeussere von $\mathfrak{G}_p$“, die der zu $\mathfrak{G}_p$ inneren das „Innere von $\mathfrak{G}_p$“.

Eine zu $\mathfrak{G}_p$ äussere $\mathfrak{E}''_{n-1-p}$ kann bei stetiger Bewegung im Raume $\mathfrak{R}_n$, ohne $\mathfrak{G}_p$ zu treffen, ihre Indicatrix umkehren. Sie bewege sich z. B. in besagte $\mathfrak{E}'_{n-p}$ hinein, kehre sich in derselben um, und komme auf dem umgekehrten Wege in ihre frühere Lage zurück. Das ist den zu $\mathfrak{G}_p$ inneren dualen Ebenen nicht möglich.

Insofern die Umkehrbarkeit der Indicatrix das Kriterium für die Einseitigkeit ist, kann man in Erweiterung einer früheren

Definition sagen, das Aeussere von $\mathfrak{G}_p$ sei in Bezug auf die zu $\mathfrak{G}_p$ dualen Gebilde einseitig, während das Innere von $\mathfrak{G}_p$ zweiseitig ist. — In dem Grenzfalle $n-1-p=0$, in dem die zu $\mathfrak{G}_p$ dualen Gebilde Punkte sind, zeigt sich hier, dass jeder $\mathfrak{R}_n$ als „Doppelfläche“ nach Analogie der Ebene der projektiven Geometrie aufzufassen ist. Denn der Begriff „einseitig in Bezug auf Punkte“ deckt sich wesentlich mit dem, was wir früher ohne Zusatz einseitig nannten.

15. Das Gebilde $\mathfrak{G}_p$ besitzt laut Definition keine Doppelpunkte. Ist nun ein geschlossenes $\mathfrak{G}_p$ zweiseitig, was bei den obigen Beispielen ebenfalls zutrifft, so kann man Inneres und Aeusseres mit den Seiten von $\mathfrak{G}_p$ in Beziehung setzen, und zwar möge das Innere stets links liegen. Damit ist bei ungeradem p auf jeder das Innere umspannenden Curve von $\mathfrak{G}_p$ zugleich ein Sinn festgelegt. Einseitige Gebilde zeigen diese Beziehung nicht.

§ 8. Poincaré's Satz über complementäre zweiseitige geschlossene (resp. unbegrenzte) Gebilde.

16. Die zweiseitigen geschlossenen Gebilde:

$$\mathfrak{G}_p\colon\quad x_i = x_i(u_1 \dots u_p),\qquad \mathfrak{G}'_{n-p}\colon\quad x'_i = x'_i(u_{p+1} \dots u_n)$$

mögen einander (ev. nach stetiger Deformation) in einzelnen Punkten schneiden. Dann lässt sich behaupten, dass die über alle Schnittpunkte genommene Summe $\sum \operatorname{sign} \Delta(x, x')$ verschwindet.

Beweis: Zunächst ist $\Delta(x, x')$ eine eindeutige Funktion des Punktepaares $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$, sofern sich $\mathfrak{x}$ nur auf $\mathfrak{G}_p$, $\mathfrak{x}'$ nur auf $\mathfrak{G}'_{n-p}$ bewegt. Eine Ebene $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$, die stets zu $\mathfrak{G}'_{n-p}$ tangential bleiben soll, bewege man nun längs einer geschlossenen Curve $\mathfrak{f}'$ auf $\mathfrak{G}'_{n-p}$, die, ohne sich zu durchsetzen, alle jene Schnittpunkte $(\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}'_{n-p})$ enthält. Die Lagen von $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ werden dabei teils dem Inneren, teils dem Aeusseren von $\mathfrak{G}_p$ angehören, und bei seiner Bewegung wird also $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ abwechselnd in das Innere und in das Aeussere von $\mathfrak{G}_p$ kommen.

Man bestimme die Indicatrix für eine der inneren dualen Ebenen und dadurch vermöge der Stetigkeit für das ganze Innere von $\mathfrak{G}_p$. Zwischen jedem Heraus- und Hineintreten der Ebene $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$, wenn es nicht in einem der Schnittpunkte geschieht, liegt eine Umkehr ihrer Indicatrix. Man erkennt dies, wenn man $\Delta(x, x'')$ bildet, indem man für $\mathfrak{x}''$ (mit den Coordinaten x''_i)

einen Punkt des Weges von $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ nimmt, d. h. desjenigen Gebildes $\mathfrak{F}'_{n-p}$, das die Ebene $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ bei ihrer Bewegung erzeugt. Dabei wird auf der Curve $\mathfrak{f}'$: $\Delta(x, x'') = \Delta(x, x')$. Nur wo $\mathfrak{f}'$ durch einen der Schnittpunkte $(\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}'_{n-p})$ führt, kann die Richtung des Curvenelementes $d\mathfrak{f}'$ das Zeichen von $\Delta(x, x'')$ bestimmen.

Die Curve $\mathfrak{f}'$ deformieren wir nun auf $\mathfrak{G}'_{n-p}$ noch so, dass in den Schnittpunkten $(\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}'_{n-p})$ für $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ stets die Indicatrix der zu $\mathfrak{G}_p$ inneren Ebenen gilt. D. h. $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ soll bei seiner Bewegung mit solcher Indicatrix in den Schnittpunkten ankommen, dass es von hier aus bei einer geringen Bewegung nach dem Inneren zu die dort geltende Indicatrix stetig erhält. Unter diesen Umständen hat nun zwischen zwei Schnittpunkten $(\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}'_{n-p})$, die längs $\mathfrak{f}'$ aufeinanderfolgen, eine ungerade Anzahl von Durchtritten von $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ aus dem Inneren in das Aeussere oder umgekehrt stattgefunden, d. h. tritt $\mathfrak{E}'_{n-1-p}$ durch den einen dieser Schnittpunkte heraus, so tritt sie durch den anderen hinein. Daraus folgt sogleich, dass eine gerade Anzahl solcher Schnittpunkte auf $\mathfrak{f}'$ liegt, an denen die Werte $\operatorname{sign}\Delta(x, x') = \pm 1$ alternieren.

Es gilt nun nur noch, den Punkt $\mathfrak{x}$ auf einer $\mathfrak{G}_p$ angehörigen Curve $\mathfrak{f}$ alle Schnittpunkte so durchlaufen zu lassen, dass dort $\operatorname{sign}\Delta(x, x')$ überall denselben Wert erhält, wenn man $\mathfrak{x}'$ festhält. Eine stets zu $\mathfrak{G}_p$ tangentiale Ebene $\mathfrak{E}_{p-1}$ werde also längs einer solchen Curve $\mathfrak{f}$ geführt. Da die Anzahl der Schnittpunkte gerade ist, können wir jetzt $\mathfrak{f}$ so legen, dass $\mathfrak{E}_{p-1}$ in denselben abwechselnd die im Inneren von $\mathfrak{G}'_{n-p}$ geltende Indicatrix und die entgegengesetzte erhält. Das heisst aber, $\mathfrak{E}_{p-1}$ tritt bei jedem Passieren eines Schnittpunktes in das Innere (resp. jedesmal in das Aeussere) von $\mathfrak{G}'_{n-p}$, und $\operatorname{sign}\Delta(x, x')$ ist jedesmal dasselbe.

Lässt man nun $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ auf $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ nach demselben Schnittpunkte laufen, so bestimmt dort $\mathfrak{x}'$ das Zeichen, daher wird

$$\sum_{\mathfrak{x}=\mathfrak{x}'} \operatorname{sign}\Delta(x, x') = 0,$$

q. e. d.

17. Ist z. B. $\mathfrak{G}_1$ eine geschlossene Curve im Raume $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{G}'_2$ eine Kugelfläche, so verlangt die Hülfsconstruction des Beweises eine geschlossene Curve $\mathfrak{f}'$ auf $\mathfrak{G}'_2$, die durch alle Schnittpunkte $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}'_2)$ geht und deren Tangente, im Sinne des Curvenelementes genommen, in jedem dieser Punkte ebenso gerichtet ist, wie die von $\mathfrak{G}_1$ umspannten Geraden. Indem man nämlich auf einer der

letzteren einen Sinn bestimmt, tut man es vermöge der Stetigkeit für alle.

Im $\mathfrak{R}_4$ geben zwei sich in Punkten schneidende Kugeln Veranlassung, beide Curven, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$, zu ziehen und deren Tangenten zu betrachten. Allerdings kann man auch Regelflächen verwenden, die nicht gerade von den Tangenten zu $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ erzeugt werden, die Erzeugenden müssen aber Tangenten der Kugeln sein.

Auf die Grenzfälle $n-p=0$ (Punktepaar) und $n-p=1$ (geschlossene Curve) findet die Fassung des Beweises allerdings keine unmittelbare Anwendung. Die Sachlage wird aber bei $\mathfrak{G}'_{n-p}$ so einfach, dass wir darauf nicht einzugehen brauchen.

18. Der Beweis der für geschlossene Gebiete $\mathfrak{G}_p$, $\mathfrak{G}'_{n-p}$ geführt wurde, gilt offenbar überhaupt für unbegrenzte. Umgekehrt kann $\mathfrak{G}_p$ nicht begrenzt sein, wenn für den Schnitt mit *jedem* nur in Punkten schneidenden complementären geschlossenen Gebilde $\mathfrak{G}'_{n-p}$:

$$\sum_{\xi=\xi'} \operatorname{sign} \Delta(x, x') = 0$$

wird.

§ 9. Ineinandergreifen dualer geschlossener Gebilde.

19. Auch die Tangentialebenen $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$ des geschlossenen Gebildes $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ (vgl. 12) zerfallen in innere und äussere in Bezug auf das duale Gebilde $\mathfrak{G}_p$. Legt man wieder für das Innere von $\mathfrak{G}_p$ die rechte Indicatrix fest, so kann es vorkommen, dass man beim Fortschreiten längs einer Curve $\mathfrak{f}''$ auf $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ von (zu $\mathfrak{G}_p$) inneren $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$ rechter Indicatrix durch äussere zu inneren linker Indicatrix gelangt.

Beispiel im Raume $\mathfrak{R}_3$: $\mathfrak{G}_1$ sei der Kreis $x^2+y^2=4$ und die positive z-Axe bestimme den Sinn seiner inneren Geraden. $\mathfrak{G}''_1$ sei der Kreis $x^2+z^2=1$. Beim Umkreisen von $\mathfrak{G}''_1$ findet man, dass die Tangente, z. B. bei $z=0$, $x=-1$ eine zu $\mathfrak{G}_1$ innere in der Richtung der z-Axe, bei $z=0$, $x=1$ eine innere gegen die Richtung der z-Axe, dazwischen bei $x=0$, $z=1$ eine zu $\mathfrak{G}_1$ äussere ist. Dies gilt auch noch, wenn man $\mathfrak{G}''_1$ längs z verschiebt, und bedingt kein Ineinandergreifen. $\mathfrak{G}''_1$ lässt sich aber auch um eine Axe $z=1$, $y=0$ drehen, so dass seine Ebene zu der von $\mathfrak{G}_1$ parallel wird. Dann wird keine seiner Tangenten mehr von $\mathfrak{G}_1$ umfasst.

Wie man sieht, lässt sich in solchem Falle $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ so deformieren, dass die Curve $\mathfrak{f}''$ während der Deformation

$\mathfrak{G}_p$ nicht trifft, während beiderseits die inneren $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$ entgegengesetzter Indicatrix zu äusseren werden. Es hängt dies damit zusammen, dass $\Delta(x, x')$ für $\mathfrak{G}_p$ und $\mathfrak{F}'_{n-p}$, den Weg der $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$ gebildet, in den Punkten der Bahncurve $\mathfrak{f}''$, die den Uebergang von inneren zu äusseren $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$ bezeichnen, nacheinander entgegengesetztes Zeichen hat.

Denkt man sich durch derartige Deformationen in $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ etwa alle zu $\mathfrak{G}_p$ inneren $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$ linker Indicatrix entfernt, und besitzt $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ noch e_{n-1-p} Stücke mit zu $\mathfrak{G}_p$ inneren Tangentialebenen $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$, so sagen wir, $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ greife e_{n-1-p}-mal in $\mathfrak{G}_p$ ein.

Mit anderen Worten: Zerfällt $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ in $2(m_1+m_2)$ Stücke, deren m_1 zu $\mathfrak{G}_p$ innere Tangenten rechter Indicatrix, m_2 innere linker Indicatrix, m_1+m_2 äussere Tangenten aufweisen, so ist die Zahl des Eingreifens von $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ in $\mathfrak{G}_p$: $e_{n-1-p} = |m_1 - m_2|$. — Bei den Anwendungen handelt es sich später nur um einmaliges Eingreifen.

Beispiele des Ineinandergreifens: Die Kreislinien

$$(x_1-1)^2+x_2^2 = 4,\ x_3 = 0 \quad \text{und} \quad (x_1+1)^2+x_3^2 = 4,\ x_2 = 0$$

im $\mathfrak{R}_3$. — Die Kugelflächen

$$(x_1-1)^2+x_2^2+x_3^2 = 4,\ x_4 = x_5 = 0 \text{ und } x_4^2+x_5^2+(x_1+1)^2 = 4,\ x_2 = x_3 = 0$$

im $\mathfrak{R}_5$. — Als Grenzfall greift ein Punktepaar in ein Gebilde $\mathfrak{G}'_{n-1}$ im $\mathfrak{R}_n$, wenn ein Punkt innerhalb, der andere ausserhalb desselben liegt.

20. Ein nur von $\mathfrak{G}_p$ begrenztes endliches Flächenstück $\mathfrak{S}_{p+1}$ möge von $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ k-mal geschnitten werden. Man kann dann $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ oder $\mathfrak{S}_{p+1}$ so deformieren, dass eine gleiche Anzahl solcher Stellen verschwindet, in denen die Durchsetzung seitens $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ im Sinne der zu $\mathfrak{G}_p$ inneren $\mathfrak{e}''_{n-1-p}$ erfolgt, und solcher, wo sie die entgegengesetzte Richtung hat. Schliesslich bleiben e_{n-1-p} Schnittpunkte von $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ mit $\mathfrak{S}_{p+1}$ bestehen.

21. Im Raume $\mathfrak{R}_{n+1}$ lässt sich das Ineinandergreifen lösen, indem man $\mathfrak{G}_p$ so bewegt, dass alle seine Punkte andere Werte der neuen Coordinate x_{n+1} erhalten. Noch richtiger würde man sagen, dass dort das Ineinandergreifen überhaupt nicht stattfindet, denn im $\mathfrak{R}_{n+1}$ sind $\mathfrak{G}_p$ und $\mathfrak{G}''_{n-p-1}$ nicht zu einander dual.

Man erkennt auch, dass, wenn $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ e^*-mal in $\mathfrak{G}_p$ eingreift, $\mathfrak{G}_p$ aber e-mal in $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$, $e^* = e$ sein muss. Denn löst man das Ineinandergreifen im $\mathfrak{R}_{n+1}$, so kann man es wiederherstellen, indem

man $\mathfrak{G}_p$ über $\mathfrak{G}''_{n-1-p}$ schiebt oder umgekehrt, beide in eine Ebene $\mathfrak{E}_n$ hineindeformiert, und diese mit dem $\mathfrak{R}_n$ identificiert.

Man löst z. B. das Ineinandergreifen zweier Punktepaare auf einer Geraden, indem man sie in eine Ebene $\mathfrak{E}_2$ versetzt, das eines Punktepaares und einer Kreislinie im $\mathfrak{R}_2$, indem man die dritte Dimension des $\mathfrak{R}_3$ zu Hülfe nimmt, u. s. w.

§ 10. Aequidimensionale geschlossene zweiseitige Gebilde.

22. Die allgemeine Lage der geschlossenen Gebilde $\mathfrak{G}^{\mathrm{I}}_p$ und $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_p$ teilt die dualen Ebenen $\mathfrak{E}_{n-1-p}$ des Raumes $\mathfrak{R}_n$ in: 1) innere zu $\mathfrak{G}^{\mathrm{I}}_p$ sowohl wie zu $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_p$, 2) innere zu $\mathfrak{G}^{\mathrm{I}}_p$, äussere zu $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_p$, 3) äussere zu beiden, 4) äussere zu $\mathfrak{G}^{\mathrm{I}}_p$, innere zu $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_p$; ein Verhalten, das sich als Interferenz bezeichnen liesse. Für $p = n-1$, also $\mathfrak{E}_{n-1-p} = \mathfrak{E}_0$ (Punkte) zieht die Interferenz den Schnitt nach sich.

Nicht-Interferenz oder Ineinanderliegen findet statt, wenn eine der aufgezählten Klassen der $\mathfrak{E}_{n-1-p}$, z. B. die letzte, in Wegfall kommt. Dazu müssen $\mathfrak{G}^{\mathrm{I}}_p$ und $\mathfrak{G}^{\mathrm{II}}_p$ in einer Ebene $\mathfrak{E}_{p+1}$ liegen.

23. Knoten. Ineinandergreifende Gebilde können, da sie zu einander dual sein müssen, nur in Räumen ungerader Dimensionszahl gleiche Dimension besitzen. In einem Raume $\mathfrak{R}_{2p+1}$ können auch Gebilde $\mathfrak{G}_p$ in sich selbst eingreifen. Sie bilden dann Knoten.

Beispiele: Zwei neunteilige Kantenzüge, die im Raume die Punkte:

I II III IV V VI

mit den Coordinaten:

$1,0,0 \quad 0,0,-1 \quad 0,1,0 \quad -1,0,0 \quad 0,0,1 \quad 0,-1,0$

und deren Projectionen:

1 2 3 4 5 6

auf die Ebene:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

in der Reihenfolge:

1 III 4 5 I 2 3 V 6 1 (oder: 1 2 IV 5 6 II 3 4 VI 1)

verbinden. Dieser Knoten zeigt um die Axe $x_1 = x_2 = x_3$ die Trisymmetrie des Würfels um seine Diagonale. Die beiden Exemplare verhalten sich spiegelbildlich, doch gegen einander um die Axe verdreht.

Eine noch leichter vorstellbare Figur, die aber nicht mehr geradlinig ist, erhält man, wenn man auf den positiven Halbaxen je 2 Punkte in den Entfernungen 1 und 2 vom Coordinatenanfang annimmt: $I_1, I_2, II_1 \dots III_2$, und dieselben nach dem Schema der Fig. 4 zunächst durch gerade Linien hexagrammatisch verbindet. Je zwei dieser Geraden schneiden sich in einer Coordinatenebene. Man vermeidet dies dadurch, dass man die Geraden durch flache Kreisbögen ersetzt, die abwechselnd nach der Figurenaxe zu und von ihr weg convex sind.

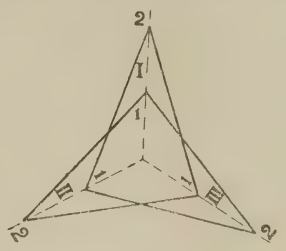

Fig. 4.

Diese Construction lässt sich dann unmittelbar auf den Flächenknoten im $\mathfrak{R}_5$ übertragen. Auf den positiven Coordinatenhalbstrahlen nehme man analog Punkte in den Entfernungen 1 und 2: $I_1, I_2, II_1 \dots V_2$, und construiere die 10 Dreiecke: $I_1 II_2 III_1$, $II_2 III_1 IV_2$, $III_1 IV_2 V_1$, $IV_2 V_1 I_2$, $V_1 I_2 II_1 \dots V_2 I_1 II_2$, in pentagrammatischer Anordnung. Je zwei benachbarte haben eine Seite gemein. Wir erhalten so einen Streifen von 10 Dreiecken, den man leicht durch Aufsetzen zweier Kappen von je 5 in einer Ecke zusammenstossenden Dreiecken auf die Kantenfolgen $I_1 II_1 III_1 IV_1 V_1$ und $I_2 II_2 III_2 IV_2 V_2$ zu einem Icosaeder vervollständigt. Es schneiden sich jedoch noch je zwei Dreiecke des Streifens innerhalb einer Coordinatenebene $\mathfrak{E}_3$, z. B. $I_1 II_2 III_1$ mit $I_2 II_1 III_2$ in einer Linie. Diese Dreiecke ersetze man nun durch flache Kugeldreicke, die abwechselnd in das positive 32tel des $\mathfrak{R}_5$ hineinragen, und aus demselben heraus. In der Figur deuten die zusammenhängenden Linien den Verlauf der Dreiecke an. Der Icosoederknoten zeigt natürlich Pentasymmetrie. Uebrigens lässt sich auch ein Pentagondodecaederknoten im $\mathfrak{R}_5$ construieren.

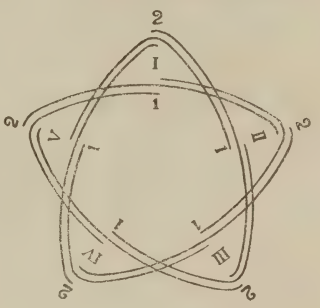

Fig. 5.

§ 11. Zusammenhang.

24. Eine Figur von p Dimensionen heisst zusammenhängend in Bezug auf ihre Elemente $q$ter Dimension (d. h. ihre Tangentialebenen e_q, $(q = 0, 1 \dots p)$, wenn man eines dieser Elemente e_q in die Lage jedes anderen bewegen kann, ohne dass es einen Augenblick aufhört, tangential zur Figur zu liegen.

Die bisher betrachteten $\mathfrak{G}_p$ sind zusammenhängend in den $\mathfrak{e}_0$ (Punkten) construiert, wohl auch in den $\mathfrak{e}_{p-1}$ stetig angenommen worden, obwohl in letzterer Annahme nichts Wesentliches lag.

Ein Beispiel einer in Bezug auf Punkte zerfallenden, in Bezug auf Gerade und Ebenen zusammenhängenden Figur bilden zwei Kugelflächen im $\mathfrak{R}_3$. Allerdings wird der Zusammenhang vermittelst der Doppeltangenten und Doppeltangentialebenen hergestellt. — Eine Polyederfläche zerfällt in Bezug auf Geraden und hängt in Bezug auf Punkte zusammen. — Die von jetzt ab zu betrachtenden Gebilde sollen in Bezug auf alle ihre Elemente $\mathfrak{e}_q$ zusammenhängen.

25. Aequivalent sollen solche Flächen $\mathfrak{g}_q$ heissen, die sich, ohne aus $\mathfrak{G}_p$ herauszutreten, stetig ineinander deformieren lassen. Aufeinanderfallende Stücke zweier Flächen sollen sich hierbei aufheben, wenn sie entgegengesetzte Indicatrix haben. Es kann also auch ein Gebilde $\mathfrak{g}_q$ der Summe mehrerer anderen aequivalent sein: $\mathfrak{g}_q \equiv \mathfrak{g}'_q + \mathfrak{g}''_q$.

Z. B. stellt sich auf einer 8-förmigen Doppelringfläche die das Mittelstück umspannende Curve aequivalent der Summe zweier die Einzelringe umspannenden dar. Letztere kann man so deformieren, dass sie sich (bei entgegengesetzter Indicatrix) aufheben, wo sie zusammenfallen, während sich die übrigbleibenden Teile um das Mittelstück der Acht legen lassen.

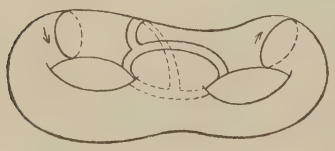

Fig. 6.

Bei der Bildung solcher Summen soll jedoch auch die Reihenfolge beachtet werden, in der sich die Flächen aneinanderschliessen. Also ist in einer Aequivalenz die Addition nicht als commutativ anzusehen.

Lässt sich $\mathfrak{g}_q$ stetig auf einen Punkt zusammenziehen, so schreiben wir:

$$\mathfrak{g}_q \equiv 0.$$

Als abhängig von einander bezeichnen wir eine Reihe von Flächen $\mathfrak{g}_q$, wenn eine von der Identität verschiedene Aequivalenz besteht, deren Glieder sämmtlich dieser Reihe angehören.

Aus $\alpha\mathfrak{g}_q \equiv 0$, wenn α eine positive ganze Zahl ist, folgt nicht mit Notwendigkeit $\mathfrak{g}_q \equiv 0$, doch zählt dann $\mathfrak{g}_q$ für sich bereits nicht als ein unabhängiges Gebilde.

Den Zusammenhang von $\mathfrak{G}_p$ in Bezug auf $q-1$-dimensionale Elemente $\mathfrak{e}_{q-1}$ nennen wir z_q-fach, wenn sich in

$\mathfrak{G}_q z_q - 1$ unabhängige geschlossene Flächen $\mathfrak{g}_q$ legen lassen, die unserer Definition zweiseitiger geschlossener Gebilde entsprechen.

26. Als Definition der Zusammenhangszahl Z_q eines Systems von p dimensionalen Gebilden ferner gelte die Summe der Zusammenhangszahlen der Teile, vermindert um so viele Einheiten, als Vereinigungen nötig wären, um aus dem System ein einteiliges zu machen. Sind also in Bezug auf die e_{q-1} m Teile vorhanden, so ist:

$$Z_q = \sum_{k=1}^{m} z_q^{(k)} - (m-1) = 1 + \sum_{k=1}^{m} (z_q^{(k)} - 1),$$

wo $z_q^{(k)}$ die Zusammenhangszahl des k-ten Teiles ist.

Wäre die Zusammenhangszahl $z_q = 0$, so würde das bedeuten, dass die Figur in Bezug auf die Elemente e_{q-1} genau in zwei Teile zerfällt.

§ 12. Betti'sche Zahlen.

27. Bildet man nun für den Raum $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$, der entsteht, wenn man alle Punkte von $\mathfrak{G}_p$ aus dem Gesammtraume $\mathfrak{R}_n$ wegnimmt, die Zusammenhangszahl Z_{n-1-q}, so erhält man die $(p-q)$te Betti'sche Zahl des Gebildes $\mathfrak{G}_p$:

$$P_{p-q} = Z_{n-1-q}.$$

Aus dieser Definition ergiebt sich, dass im Restraume $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$ genau $P_{p-q} - 1$ unabhängige geschlossene Gebilde $\mathfrak{g}'_{n-1-q}$ construiert werden können, in welche geschlossene Gebilde $\mathfrak{g}_q$ auf $\mathfrak{G}_p$ eingreifen. Denn alle $\mathfrak{g}'_{n-1-q}$ des Restraumes $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$, in die keine $\mathfrak{g}_q$ auf $\mathfrak{G}_p$ eingreifen, lassen sich stetig auf Punkte zusammenziehen, sind also einander aequivalent, weil $\equiv 0$. Lassen sich dieselben wegen Zerfallens des $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$ nicht in einander deformieren, so ist doch diesem Umstande bereits bei der Definition der Zusammenhangszahl eines Systems Rechnung getragen worden.

Kann man umgekehrt im $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$ k und nicht mehr unabhängige $\mathfrak{g}'_{n-1-q}$ construieren, in welche auf $\mathfrak{G}_p$ geschlossene $\mathfrak{g}_q$ eingreifen, so bleiben nur noch diejenigen $\mathfrak{g}'_{n-1-q}$ im $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$ von den so construierten unabhängig, die $\equiv 0$ sind. Daher wird:

$$Z_{n-1-q} = k+1,$$

also:

$$k = P_{p-q} - 1.$$

In der Figur 6 einer Doppelringfläche kann man die beiden Meridiane der Einzelringe concentrisch vergrössern, wodurch sie im Aussenraume Curven $\mathfrak{g}_1'$ werden, die in Parallelkreise auf dem Doppelringe eingreifen. Andrerseits kann man einen inneren Aequator eines Einzelringes concentrisch vergrössern, wodurch er in den umschlossenen Raum tritt. Er greift dann in Meridiane ein. Hier ist $p = 2$, $q = 1$, $k = 4$, $Z_1 = P_1 = 5$. Der Raum $(\mathfrak{R}_3 - \mathfrak{G}_2)$ zerfällt nämlich in $m = 2$ Teile. Für den Aussenraum ist $z_1' = 3$, für den Innenraum $z_1'' = 3$, also:

$$Z_1 = z_1' + z_1'' - (m-1) = 5.$$

Wie bereits bemerkt wurde, handelt es sich hier immer nur um einfaches Ineinandergreifen der Gebilde $\mathfrak{g}_q$ und $\mathfrak{g}_{n-1-q}'$; denn ein sich mehrfach durch ein $\mathfrak{g}_{n-1-q}'$ windendes $\mathfrak{g}_q$ würde auf $\mathfrak{G}_p$ einem einfachen, vermehrt um eine mehrfache Umkreisung von $\mathfrak{g}_{n-1-q}'$ aequivalent werden. Es mag auch noch bemerkt werden, dass gemäss der Definition der $\mathfrak{g}_q$ ein Element e_q, das zu $\mathfrak{g}_q$ tangential einer geschlossenen Curve auf $\mathfrak{g}_q$ folgt, in die Anfangslage mit der Anfangsindicatrix, überhaupt ohne Torsion der von ihm beschriebenen Fläche $\mathfrak{F}_{q+1}$ ankommt.

28. Wir construieren in einem beliebigen ersten der Teile des Restraumes $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$ eine Fläche $\mathfrak{G}_{n-q}'$, welche die k' in diesem Teile gelegenen unabhängigen $\mathfrak{g}_{n-1-q}'$ enthalten soll, und vervollständigen sie im ganzen Raume $\mathfrak{R}_n$ zu einem geschlossenen Gebilde.

Der Schnitt $(\mathfrak{G}_p, \mathfrak{G}_{n-q}')$ besteht dann aus mehreren geschlossenen Gebilden $\mathfrak{g}_{p-q}$, die sich durch stetige Deformation von $\mathfrak{G}_{n-q}'$ teils auf 0 reducieren lassen, teils auf $2k'$ unabhängige $\mathfrak{g}_{p-q}$. Je zwei der letzteren haben entgegengesetzte Indicatrix, dem Umstande gemäss, dass auf $\mathfrak{G}_p$ geschlossene Gebilde der Art $\mathfrak{g}_q$ ebenso oft in $\mathfrak{G}_{n-q}'$ eindringen, wie heraustreten.

Wir deformieren $\mathfrak{G}_{n-q}'$ noch so, dass stets die beiden zusammengehörigen $\mathfrak{g}_{p-q}$, ohne zusammenzufallen, beliebig dicht neben einander liegen. $\mathfrak{G}_{n-q}'$ soll sich dabei auch nicht selbst durchsetzen. Schliesslich zertrennen wir $\mathfrak{G}_p$ zwischen jedem Paare der $\mathfrak{g}_{p-q}$, also k'-mal, in Bezug auf seine Elemente e_{q-1}, wodurch die $\mathfrak{g}_{p-q}$ zu Grenzen von $\mathfrak{G}_p$ in Bezug auf diese Elemente e_{q-1} werden, wie sich sogleich zeigen wird.

Bei der Figur des Doppelringes $\mathfrak{G}_2$ z. B. ist eine geschlossene Fläche durch die beiden in den Aussenraum hineindeformierten Meridianschnitte zu legen. Sie schneidet jeden Einzel-

ring zweimal, oder lässt sich wenigstens so deformieren, dass sie es tut, und weiter auch so falten, dass die beiden Schnitte mit einem Einzelringe (die entgegengesetzte Indicatrix haben) beliebig dicht neben einander liegen.

Es wurde bewiesen, dass für die Schnittpunkte $(\mathfrak{G}'_{n-q}, \mathfrak{F}_q)$, wo $\mathfrak{F}_q$ eine beliebige zweiseitige, durch Bewegung einer Ebene $\mathfrak{E}_{q-1}$ längs geschlossener Bahn erzeugte Fläche ist, $\sum_{x=x'} \operatorname{sign} \Delta(x, x')$ verschwindet.

Man beschränke sich nun bei der Erzeugung von $\mathfrak{F}_q$ auf solche Lagen der Erzeugenden $\mathfrak{E}_{q-1}$, die mit Tangentialebenen e_{q-1} von $\mathfrak{G}_p$ zusammenfallen. Alle Schnittpunkte $(\mathfrak{G}'_{n-q}, \mathfrak{F}_q)$ liegen dann auf den soeben construierten Gebilden $\mathfrak{g}_{p-q}$, und es folgt:

$$\sum_{x=x'} \operatorname{sign} \Delta(x, x') = 0$$

für jede von $q-1$-dimensionalen Tangentialebenen zu $\mathfrak{G}_p$ längs einer beliebigen geschlossenen Curve erzeugte Fläche, die Summe über deren Schnittpunkte mit den $2k'$ Grenzgebilden $\mathfrak{g}_{p-q}$ genommen.

In der Tat giebt uns dieses Verhalten erst ein Recht, die $\mathfrak{g}_{p-q}$ als Grenzen zu bezeichnen; denn es bedeutet, wie früher, dass die Elemente e_{q-1} von $\mathfrak{G}_p$ durch die $2k'$ Schnittränder $\mathfrak{g}_{p-q}$ in innere und äussere der dadurch nun also wirklich begrenzten Figur getrennt werden. Das Aeussere (auf $\mathfrak{G}_p$) besteht dabei aus den unendlich schmalen Streifen zwischen den Paaren nebeneinanderliegender Ränder $\mathfrak{g}_{p-q}$ mit entgegengesetzter Indicatrix.

Dasselbe Verfahren wiederholen wir an dem bereits zerschnittenen $\mathfrak{G}_p$, indem wir von einem beliebigen anderen Teile des Restraumes ausgehen, u. s. f., und gelangen zu dem Resultat: Es lassen sich k Schnitte (mit $2k$ Rändern) legen, die $\mathfrak{G}_p$ nicht in Bezug auf seine Elemente e_{q-1} zerstücken. Jeder weitere Schnitt müsste einen der schon bestehenden, also zwei Ränder $\mathfrak{g}_{p-q}$ treffen, und $\mathfrak{G}_p$ müsste in Bezug auf seine Elemente e_{q-1} zerfallen. Die Betti'sche Zahl P_{p-q} giebt also, vermindert um eine Einheit, die Anzahl der $p-q$-dimensionalen Schnitte an, die sich auf $\mathfrak{G}_p$ führen lassen, ohne dasselbe in Bezug auf seine Elemente e_{q-1} zu zerstücken.

Ist $q = 1$, so sind die $e_{q-1} = e_0$ Punkte. Bei der ersten Betti'schen Zahl P_1 handelt es sich also um ein Zerstücken im gewöhnlichen Sinne,

29. Als homolog bezeichnen wir Figuren in Bezug auf eine gegebene veränderliche Grösse, wenn letztere für dieselben gleiche Werte annimmt. Entsprechend soll eine Summe von Figuren homolog Null (geschrieben ~ 0) heissen, wenn die Summe der Werte der Bezugsvariabeln für ihre Summanden gleich Null ist.

Wird als Bezugsgrösse $\sum_{x=x'} \operatorname{sign} \Delta(x, x')$ genommen, wo die Summe sich auf alle Schnittpunkte der betrachteten Figuren mit einer beliebigen geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}_q$ in $\mathfrak{G}_p$ erstreckt, dann ist auf $\mathfrak{G}_p$:

$$\sum \mathfrak{g}_{p-q} \sim 0,$$

wenn die $\mathfrak{g}_{p-q}$ gerade die $\mathfrak{e}_{q-1}$ von $\mathfrak{G}_p$ in innere und äussere teilen, also eine vollständige Begrenzung von $\mathfrak{G}_p$ in Bezug auf seine $\mathfrak{e}_{q-1}$ bilden. Es hat sich gezeigt, dass zwischen beliebigen P_{p-q} Gebilden $\mathfrak{g}_{p-q}$ auf $\mathfrak{G}_p$ mindestens eine Homologie $\sum \mathfrak{g}_{p-q} \sim 0$ bestehen muss. In Homologieen ist die Addition commutativ, da sie es für die Werte der Bezugsgrösse ist.

30. Vereinfachung der Auffindung der Bettischen Zahlen. Da sich die P_{p-q} als völlig unabhängig von der Dimension n des bei ihrer Aufstellung benutzten Raumes $\mathfrak{R}_n$ erweisen, also als „quantità intrinseche“ des Gebildes $\mathfrak{G}_p$, so deformiert man am besten $\mathfrak{G}_p$ so, dass es ganz in einer Ebene $\mathfrak{E}_{p+1}$ des $\mathfrak{R}_n$ liegt, und benutzt diese als Raum $\mathfrak{R}_{p+1}$ bei der Untersuchung auf Betti'sche Zahlen. Ist etwa $\mathfrak{G}_p$ ursprünglich verknotet, so stört auch das nicht, da man den Knoten zunächst in einem höheren Raume lösen und dann auf $\mathfrak{R}_{p+1}$ herabgehen kann. Aus demselben Grunde braucht man auch Complicationen aus etwaigem Ineinandergreifen der eingreifenden $\mathfrak{g}'_{n-1-q}$ des Restraumes $(\mathfrak{R}_n - \mathfrak{G}_p)$ — die übrigens nur vorkommen können, wenn $n = 2q+1$ ist — keine Beachtung zu schenken.

§ 13. Beispiele zu den Betti'schen Zahlen.

31. (s. Fig. 7).

A) Vollkugel $(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2 \leqq 4^2$ im $\mathfrak{R}_3$, aus der ein Hohlring ausgeschnitten ist, dessen Oberfläche durch Rotation des Kreises $(x_1-3)^2+x_2^2 = 1^2$, $x_3 = 0$ um die Axe $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ entstand. Dieses Gebilde ist nicht geschlossen, sondern begrenzt. Es ist $n = p = 3$, q ist $= 1$ und $= 2$ zu nehmen. Z. B. wird: $\mathfrak{g}'_0$ ein Punktepaar: $x_1 = \frac{1}{2}, 3$, $x_2 = x_3 = 0$, in wel-

ches als $\mathfrak{g}_2$ die Kugelfläche $(x_1-3)^2+x_2^2+x_3^2=(\frac{3}{2})^2$ eingreift: $P_1=2$; $\mathfrak{g}_1'$ der Kreis: $(x_1-5)^2+x_3^2=2^2$, $x_2=0$ und in ihn eingreifend der Kreis $\mathfrak{g}_1$: $(x_1-3)^2+x_2^2=(\frac{3}{2})^2$, $x_3=0$: $P_2=2$.

B) Dieselbe Figur in den $\mathfrak{R}_4$ versetzt und dort um die Ebene $x_1=x_4=0$ rotiert, so dass das Centrum den Kreis

$$x_1^2+x_4^2=5^2,\quad x_2=x_3=0$$

beschreibt, auf dessen Ebene die *NS*-Richtung senkrecht bleibt, während die Ebene des Nullmeridians stets durch den Coordinatenanfang geht. Der Durchschnitt der Figur in der Ebene $x_3=x_4=0$ rotiert dabei einfach in der 3-dimensionalen Ebene $\mathfrak{E}_3(x_3=0)$ um die Axe $x_1=x_2=0$, d. h. die x_4-Axe. Die Vollkugel beschreibt einen 4-dimensionalen Vollring $\mathfrak{G}_4$, ihre Oberfläche eine Ringfläche $\mathfrak{G}_3$, die Ringfläche eine ringflächenartig hohle Ringfläche $\mathfrak{G}_3'$. Schneidet man dann noch die 4-dimensionale Kugel:

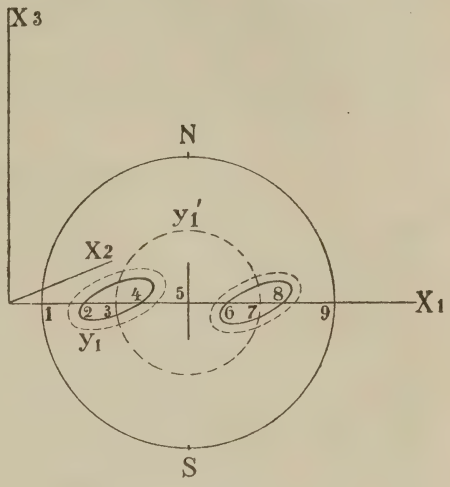

Fig. 7.

$$(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leqq(\tfrac{1}{2})^2$$

heraus, so hat man im Restraume $(\mathfrak{R}_4-\mathfrak{G}_4)$ z. B.:

1) das Punktepaar $x_1=\frac{1}{2}$, 5, $x_2=x_3=x_4=0$, in das die 3-dimensionale innere Kugelfläche $(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\leqq(\frac{1}{2})^2$ eingreift: $P_1=2$;

2) beschreiben die Punkte $\mathfrak{g}_2'$ (unter A) die concentrischen Kreislinien $x_1^2+x_4^2=(\frac{1}{2})^2$, $x_1^2+x_4^2=3^2$, $x_2=x_3=0$, zwischen welche (d. h. in die grössere), die 2-dimensionale Kugelfläche

$$(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2=(\tfrac{3}{2})^2,\quad x_4=0$$

eingreift: $P_2=2$;

3) beschreibt der Kreis $\mathfrak{g}_1'$ (unter A) eine Ringfläche, in die in $\mathfrak{G}_4$ der Kreis: $(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2=5^2$, $x_4=0$ eingreift und

4) beschreibt ein Punkt der Vollkugel einen Kreis, der in die Kugelfläche $(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2=5^2$, $x_4=0$ eingreift. Aus 3) und 4): $P_3=3$.

C) Die Vollkugel wie bei A) drehe sich bei ruhendem Centrum um die Ebene $x_1=5$, $x_4=0$, und es

werde wieder die Kugel $(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \leqq (\frac{1}{2})^2$ ausgeschnitten. Das Punktepaar B) 1) findet sich auch hier, ebenso die Kreislinien B) 2). Statt der Ringfläche B) 3) erhalten wir eine Kugelfläche, während die Kugelfläche B) 4) wegfällt: $P_1 = 2$, $P_2 = 2$, $P_3 = 2$.

D) Dreht sich dieselbe Figur dagegen um die Ebene $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 0$, und wird wieder die Kugel

$$(x_1-5)^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \leqq (\tfrac{1}{2})^2$$

ausgeschnitten, so bleibt B) 3) eine Ringfläche. Sonst ist alles wie unter C): $P_1 = 2$, $P_2 = 2$, $P_3 = 2$.

32. Die Fälle C) und D), in denen die Betti'schen Zahlen die gleichen sind, zeigen, dass letztere zur Characterisierung des Zusammenhanges, also auch zur Festlegung des Homoeomorphismus nicht ausreichen. Wir erfahren durch dieselben wohl die Zusammenhangszahl des Restraumes und damit die Anzahl der eingreifenden Gebilde, aber nicht deren Gestalt. So haben wir in C) eine Kugelfläche statt einer Ringfläche in D).

Es wäre also noch nötig, über die Betti'schen Zahlen der eingreifenden Flächen Auskunft zu geben, ehe man über den Homoeomorphismus zweier mehrfach zusammenhängender Gebilde entscheiden könnte. Im $\mathfrak{R}_3$ ist das allerdings unnötig, denn hier kommen als eingreifende Gebilde nur in Betracht:

1) Punktepaare, die eben getrennt liegen, also die (uneigentliche) Zusammenhangszahl $z_0 = 0$ haben;

2) geschlossene Curven, die auch in Bezug auf ihre Tangenten stetig sein sollen, also durch ein Punktepaar zerfällt werden: $z_1 = 3$.

Die (uneigentliche) Betti'sche Zahl P_0 wurde bisher beiseite gelassen, weil man bei ihrer Deutung auf Elemente e_{-1} zurückgreifen müsste. In eine geschlossene Curve in der Ebene greift jedoch ein Punktepaar ein, ebenso in eine Kugelfläche oder Ringfläche im $\mathfrak{R}_3$, usw., daher ist $Z_0 = 3$ anzunehmen. Auch ist dies tatsächlich die Zusammenhangszahl des hier in einen einfach und einen zweifach zusammenhängenden Teil zerfallenden Restraumes.

§ 14. Betti'sche Zahlen geschlossener Gebilde.

33. Ein geschlossenes $\mathfrak{G}_p$ trennt den Raum $\mathfrak{R}_{p+1}$ hinsichtlich aller seiner Elemente in zwei Teile I, II. In jedes geschlossene Gebilde $\mathfrak{g}'_{p-q}$ im Teile I, welches in ein $\mathfrak{g}_q$ auf $\mathfrak{G}_p$ ein-

greift, können natürlich auch geschlossene Gebilde $\mathfrak{g}_q''$ in II eingreifen, da man $\mathfrak{g}_q$ im $\mathfrak{R}_{p+1}$ in den Teil II hineindeformieren kann. Kann man daher k'_{p-q}, unabhängige $\mathfrak{g}'_{p-q}$ in I, k_q'' unabhängige $\mathfrak{g}_q''$ in II construieren, die in zu ihnen duale Gebilde auf $\mathfrak{G}_p$ eingreifen, so ist $k'_{p-q} \geqq k_q''$. Ebenso beweist man aber, dass $k_q'' \geqq k'_{p-q}$ ist. Daher wird $k'_{p-q} = k_q''$ und analog $k''_{p-q} = k'_q$ $(q = 1, 2 \ldots p-1)$. Da nun $P_{p-q} = 1 + k'_{p-q} + k''_{p-q}$, $P_q = 1 + k'_q + k''_q$, so gelangen wir zu dem Satze:

Für ein geschlossenes Gebilde $\mathfrak{G}_p$ gilt stets:

$$P_{p-q} = P_q \qquad (q = 1, 2, \ldots p-1).$$

34. Ist p gerade, so dass es eine Zahl $P_{\frac{p}{2}}$ giebt, so unterscheiden wir die Fälle:

1) $p = 4\tilde{\omega} + 2$, also $\frac{p}{2}$ ungerade. Dann kann man die $\mathfrak{g}'_{\frac{p}{2}}$, wenn man sie nach $\mathfrak{G}_p$ verlegt, noch mit einem Umlaufssinn versehen, so dass sie in der Homologie $\sum \mathfrak{g}_{\frac{p}{2}} \sim 0$ alle mit rechter Indicatrix auftreten (also alle mit positivem Vorzeichen). So sind es aber k Schnitte, wie wir sie zur Aufstellung von $P_{\frac{p}{2}}$ brauchen. Daher wird: $P_{\frac{p}{2}} = P_{2\tilde{\omega}+1} = 1 + k = 1 + 2k'$ ungerade.

2) $p = 4\tilde{\omega}$. Bei den $\mathfrak{g}'_{\frac{p}{2}}$ haben wir es wegen ihrer geraden Dimensionszahl nicht mehr in der Hand, durch Richtungsänderung ihre Indicatrix umzukehren. Es lässt sich daher über $P_{\frac{p}{2}}$ nichts schliessen.

Für $p = 2$ ist P_1 die Zusammenhangszahl der (Riemann'schen) Fläche,

$$\frac{P_1 - 1}{2} = \frac{k}{2} = k'$$

also das Geschlecht derselben.

§ 15. Gruppe G_p des Gebildes $\mathfrak{G}_p$.

35. Die Umläufe um geschlossene Curven $\mathfrak{g}_1$ im Gebilde $\mathfrak{G}_p$ bilden offenbar eine Gruppe, falls man zwei derselben als gleich ansieht, wenn sie in dem früher definierten Sinne äquivalent sind. Diese Gruppe G_p heisse schlechtweg die Gruppe von $\mathfrak{G}_p$. Als erzeugende Operationen derselben lassen sich Umläufe solcher Curven (C_ν) nehmen, die ein vollständiges System unabhängiger geschlossener $\mathfrak{g}_1$ bilden, so dass für $\mathfrak{G}_p$ die Zusammenhangszahl z_1 von wesentlicher Bedeutung ist.

36. Eine mehrwertige, auf $\mathfrak{G}_p$ stetige Funktion $F(x_1 \ldots x_n)$ möge im Punkte $\mathfrak{x}$ die Werte $F_1 \ldots F_l$ annehmen, die sich bei den Umläufen (C_ν) im Allgemeinen permutieren werden. Bezeichnen wir mit (S_ν) die Substitutionen, welche sie bei den Umläufen (C_ν) erfahren, so ergeben sich zwischen denselben gewisse Relationen $S_1^{\alpha_1} S_2^{\alpha_2} S_1^{\beta_1} S_3^{\alpha_3} \ldots = 1$, wodurch in Bezug auf F jedesmal $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \beta_1 C_1 + \alpha_3 C_3 + \cdots \equiv 0$ wird. Man ersieht daraus, dass die Gruppe von F für Bahnen auf $\mathfrak{G}_p$ einer Untergruppe von G_p (ev. auch 1 oder G_p selbst) holoedrisch isomorph, d. h. mit G_p isomorph ist. (Man bemerkt, dass aus einer Beziehung $\alpha C \equiv 0$ nicht etwa notwendig $C \equiv 0$ folgt).

37. In seinem während des Druckes dieser Dissertation erschienenen „Cinquième complément à l'Analysis situs" gibt Poincaré ein Beispiel für ein geschlossenes $\mathfrak{G}_3$, bei dem die Bettischen Zahlen $P_1 = P_2 = 1$ wie bei Oberfläche der vierdimensionalen Kugel sind und in dem überdies jede geschlossene Curve C immer die vollständige Begrenzung einer zweidimensionalen Fläche bildet, aber nicht immer sich auf einen Punkt zusammenziehen lässt, mithin die Gruppe G_3 von $\mathfrak{G}_3$ sich nicht bloss auf die Identität reduziert. Das betreffende $\mathfrak{G}_3$ wird aus zwei „abwickelbaren" $\mathfrak{G}_3'$ und $\mathfrak{G}_3''$, d. h. Gebilden, welche mit Stücken des $\mathfrak{R}_3$ homöomorph sind, zusammengesetzt; $\mathfrak{G}_3'$ und $\mathfrak{G}_3''$ sollen getrennt liegen, aber die Begrenzung genau gemein haben, sodass $\mathfrak{G}_3$ ein geschlossenes Gebilde wird. Für diese gemeinsame Begrenzung $\mathfrak{G}_2' = \mathfrak{G}_2''$ wird insbesondere eine Doppelringfläche genommen. Dabei lassen sich $\mathfrak{G}_3'$ und $\mathfrak{G}_3''$ speziell derart construieren, dass die Gruppe von $\mathfrak{G}_3$ eine mit der Ikosaedergruppe holoedrisch isomorphe Untergruppe enthält.

§ 16. Euler'scher Polyedersatz für $\mathfrak{G}_p$.

38. Auf $\mathfrak{G}_p$ sei eine „Karte" oder ein „Polyeder" gegeben, d. h. irgend eine Einteilung der Fläche in Gebiete $\mathfrak{a}_p$, die von einander durch $p-1$-dimensionale Grenzen $\mathfrak{a}_{p-1}$ geschieden sind, die ihrerseits von $p-2$-dimensionalen Grenzen $\mathfrak{a}_{p-2}$ umschlossen werden. In letzteren dürfen mehrere $\mathfrak{a}_{p-1}$ zusammenstossen. Die $\mathfrak{a}_{p-2}$ haben wieder Grenzen $\mathfrak{a}_{p-3}$, usw. Für alle $q(= 0, 1 \ldots p)$ seien sämtliche $\mathfrak{a}_q$ einfach zusammenhängend.

Ist a_q die Anzahl der auf dieser Karte $\mathfrak{R}_0$ vorhandenen Gebiete $\mathfrak{a}_q$, so untersuchen wir den im (verallgemeinerten) Euler-

schen Polyedersatze vorkommenden Ausdruck:

$$N = \sum_q (-1)^q a_q \qquad (q = 0, 1 \ldots p).$$

39. Diese Zahl bleibt ungeändert, wenn wir auf $\mathfrak{G}_p$ ein System von $P_1 - 1$ unabhängigen geschlossenen $\mathfrak{g}_{p-1}$ ziehen, die sich mit den a_{p-1} der Karte schneiden dürfen, aber kein $p-1$-dimensionales Stück mit ihnen gemein haben sollen. Einige a_p der Karte werden dadurch getrennt. Die $\mathfrak{g}_{p-1}$ zerfallen selbst in Gebiete der Art a_{p-1}. Die gegenseitigen Schnitte der $\mathfrak{g}_{p-1}$, geschlossene $\overline{\mathfrak{g}}_{p-2}$, lassen sich ihrerseits in die alten Grenzen a_{p-1} hineinlegen, die zu einigen der von den $\mathfrak{g}_{p-1}$ durchmessenen Gebiete gehören. Alles dies geschieht durch stetige Deformation des Systems der $\mathfrak{g}_{p-1}$. N bleibt nun unverändert, weil für jede Teilung eines Gebietes a_p eine Grenze a_{p-1}, allgemein für jede Teilung eines a_q ein a_{q-1} entstanden ist, so dass a_q und a_{q-1} stets gleichzeitig um Einheiten vermehrt wurden.

Auf der so veränderten Karte $\mathfrak{K}_1$, auf die sich jetzt die Buchstaben a_q, a_q beziehen sollen, ziehen wir ein System auf $\mathfrak{G}_p$ unabhängiger geschlossener $\mathfrak{g}_{p-2}$. Diese lassen sich in die Gebiete a_{p-1} legen, denn es kommt nicht darauf an, dass sie in ihren $p-2$-dimensionalen Tangenten stetig sind. Wie vorher bleibt N ungeändert. Die Anzahl der $\mathfrak{g}_{p-2}$ ist $P_2 - 1$.

Weiter beziehen wir die Buchstaben a_q, a_q nun wieder auf diese neue Karte $\mathfrak{K}_2$ und ziehen $P_3 - 1$ unabhängige geschlossene $\mathfrak{g}_{p-3}$, die wir in die a_{p-2} legen, usf. Bei jedem Schritt ist zu beachten, dass die neuen q-dimensionalen Gebiete mit den schon vorhandenen a_q kein q-dimensionales Stück gemein haben sollen. Zuletzt ist durch Einführung von $P_1 - 1$ unabhängigen geschlossenen Curven $\mathfrak{g}_1$ die Karte $\mathfrak{K}_{p-1}$ herzustellen.

40. Längs aller der eingeführten $\mathfrak{g}_q$ zertrennen wir nun $\mathfrak{G}_p$, d. h. wir betrachten die Punkte der $\mathfrak{g}_q$ als doppelt vorhanden, in zwei Schnitträndern $\mathfrak{g}_q'$ und $\mathfrak{g}_q''$. Auf diesen erscheinen auch die durch das Ziehen der $\mathfrak{g}_q$ entstandenen Durchschnitte der Art a_{q-r} in Doppelexemplaren. Diese zerschnittene Karte $\overline{\mathfrak{K}}_p$ liegt nun aber auf einer einfach zusammenhängenden Fläche, der zertrennten $\mathfrak{G}_p$. Statt N hat sie, wenn wir mit $\bar{a}_q$ die Anzahl ihrer q-dimensionalen Gebiete bezeichnen, die bekannte, elementar festzustellende Zahl: $\overline{N} = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q \bar{a}_q = 0$ bei geradem, $= 2$ bei ungeradem p.

41. Hätten wir, statt $\mathfrak{G}_p$ zu zertrennen, nur die Gebilde $\mathfrak{g}_q$ ein zweites Mal dicht neben ihre erste Lage

und unter denselben Bestimmungen wie vorher gezogen, so wäre dabei N erhalten geblieben. Es hätten aber die für jedes $\mathfrak{g}_q$ eingeführten zwei geschlossenen Gebilde $\mathfrak{g}'_q$ und $\mathfrak{g}''_q$, (von denen eines $\mathfrak{g}_q$ selbst ist), zwischen sich einen Streifen $\mathfrak{s}_{q+1}$ auf jedem der Gebiete ausgeschnitten, in welche sie gelegt wurden. Nennen wir diese Karte $\mathfrak{K}_p$ und vergleichen sie mit $\overline{\mathfrak{K}}_p$, so besteht der Unterschied darin, dass auf $\overline{\mathfrak{K}}_p$ sämtliche $\mathfrak{g}'_q$, $\mathfrak{g}''_q$ zusammen einen in $\frac{1}{2}(P_q - 1)$ Teile zerfallenden Aussenraum abgrenzen, während sie auf $\mathfrak{K}_p$ die Streifen $\mathfrak{s}_{q+1}$ zwischen sich einschliessen.

42. Die Differenz $N - \overline{N}$ bleibt dieselbe, wenn wir jetzt auf $\mathfrak{K}_p$ nur die Streifen $\mathfrak{s}_{q+1}$ samt ihren Grenzen beibehalten, alle übrigen Grenzen aber aufheben, während wir auf $\overline{\mathfrak{K}}_p$ nur alle der Begrenzung gegen den Aussenraum angehörigen $\mathfrak{a}_q$ beibehalten, alle übrigen aber aufheben. (Die Begrenzung gegen den Aussenraum wird aber von der Gesamtheit der nun aufgeschnittenen $\mathfrak{g}'_{p-1}$, $\mathfrak{g}''_{p-1}$, der Gesamtheit der $\mathfrak{g}'_{p-2}$, $\mathfrak{g}''_{p-2}$, usw. gebildet). Bei dieser Veränderung bleibt der Wert von N selbst erhalten; denn wir haben nun im einfach zusammenhängenden Raume einen Grenzfall einer Karte vor uns, deren sämtliche Gebiete einfach zusammenhängend sind.

43. Nun ziehen wir auf der so reducierten Karte $\mathfrak{K}_p$ noch diejenigen $q-\nu$-dimensionalen Grenzen, die nicht auf den $\mathfrak{g}'_q$, $\mathfrak{g}''_q$ liegen, so zusammen, dass $\mathfrak{g}''_q$ wieder mit $\mathfrak{g}'_q$ zu einem Gebiete verschmilzt, wodurch ebensoviele Gebiete $\mathfrak{a}_{q-\nu}$ in Wegfall kommen, wie Grenzen derselben auf den $\mathfrak{g}''_q$, so dass N wieder ungeändert bleibt.

Um dieses einzusehen, denke man sich den Uebergang schrittweise vollzogen. Zuerst ziehen sich die zwischen $\mathfrak{g}'_q$ und $\mathfrak{g}''_q$ verlaufenden Linien $\mathfrak{a}_1$ zusammen, welche Doppelexemplare der Punkte $\mathfrak{a}_0$, (die $\mathfrak{g}_q$ lieferte), verbinden. Diese Doppelexemplare vereinigen sich zu je einem. Für jede verschwundene Linie ist also ein Punkt weniger vorhanden, was die Differenzen $a_0 - a_1$ und damit N ungeändert lässt. Weiter lasse man sich die Flächen $\mathfrak{a}_2$, die nun durch Zweiecke begrenzt sind, deren Seiten wieder „Doppelexemplare“ sind, so ineinander bewegen, dass diese Doppelexemplare zu je einem verschmelzen, wobei wieder die Differenz $a_1 - a_2$, mithin N, ungeändert bleibt, usf.

Auf der so vereinfachten Karte $\mathfrak{K}_p$ ist jetzt der Wert N unmittelbar abzulesen. Es ist nämlich für $\mathfrak{K}_p$:

$$a_p = 1, \quad a_q = P_{p-q} - 1 \qquad (q = 0, 1 \ldots p-1),$$

also:

$$N = \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q (P_{p-q} - 1) + 1 = \sum (-1)^q P_{p-q} \text{ bei ungeradem } p,$$

$$= \sum (-1)^q P_{p-q} + 3 \text{ bei geradem } p.$$

44. Da nun noch bei unserem geschlossenen Gebilde $\mathfrak{G}_p$: $P_q = P_{p-q}$ ist, so verschwindet bei ungeradem p der Ausdruck $\sum (-1)^q P_{p-q}$, also wird

bei geradem p:

$$N = 3 - P_1 + P_2 - P_3 \cdots - P_{p-1},$$

bei ungeradem p:

$$N = 0$$

und die Werte gelten auch für die ursprüngliche Teilung $(\mathfrak{R}_0)$ des Gebildes $\mathfrak{G}_p$.

Zweiter Teil.

Vierdimensionale Gebilde.

§ 17. Zwei reelle Variabele.

45. Die stereographische Projection, mittels welcher man die Ebene der complexen Variabeln auf die Kugelfläche überträgt, ordnet der Geraden der reellen Werte einen Meridian (den Nullmeridian) zu, welcher sie im Nullpunkte (dem Südpole) berührt. Auch wenn wir die Variabele zunächst auf reelle Werte beschränken, können wir in irgend einer durch die Axe, die ihre Werte trägt, gehenden Ebene diese Uebertragung auf einen Kreis mit dem Radius 1 ausführen.

46. Zwei reelle Veränderliche y, z seien nun die Coordinaten eines Punktes in einer Ebene $\mathfrak{E}_2$. Senkrecht zu $\mathfrak{E}_2$ legen wir durch die Axe $z = 0$ eine Ebene $\mathfrak{E}_2'$, in der wir diese Axe, wie angegeben, auf einen Kreis $\mathfrak{K}_1$ mit dem Radius 1 projicieren. Dabei rücken wir auf jedem Projectionsstrahl auch die Gerade $y = c$ parallel mit sich in die Projection des Punktes $y = c$, $z = 0$, so dass wir einen Kreiscylinder erhalten.

Endlich legen wir durch die Axe des Cylinders und dessen einzelne Erzeugenden die Ebenen und projicieren in diesen die

Träger der z-Werte (d. h. die Erzeugenden des Cylinders) nach aussen ebenfalls auf Kreise mit dem Radius 1. Aus dem Cylinder wird dabei eine Ringfläche, auf deren kleinstem Aequatorialkreise $z = 0$, auf dem grössten $z = \infty$ ist, und die (in einer Ebene) einen Meridian $y = 0$ und einen $y = \infty$ besitzt. Ihr dreifacher Zusammenhang spiegelt die Tatsache wieder, dass man durch stetige Variation von y und z zu den Ausgangswerten zurückgelangen kann, ohne sie ∞ werden zu lassen, oder indem man mit der einen oder der anderen durch ∞ hindurchgeht.

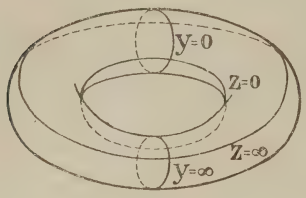

Fig. 8.

47. Eine vorgelegte mehrwertige Function, z. B.

$$w = \sqrt{1-y^2-z^2}$$

kann uns veranlassen, für die z-Werte mehrere (im Beispiele zwei) Exemplare bei jedem Werte von y anzunehmen, die zunächst auf zwei unendlich nahen Geraden, nach obiger Uebertragung aber auf fast zusammenfallenden concentrischen Kreisen liegen, die in Verzweigungspunkten ($z = \pm\sqrt{1-y^2}$) zusammenhängen. Auf der Ringfläche entstehen dadurch die Verzweigungscurven ($z = \pm\sqrt{1-y^2}$). Das Beispiel ergiebt in der Ebene den Kreis $y^2+z^2 = 1$, auf der Ringfläche eine Curve, die den Nullmeridian oben und unten, den Nullaequator rechts und links schneidet.

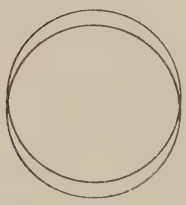
Fig. 9.

Was den Zusammenhang des Gebildes betrifft, so bemerken wir, dass sich zwei über einander liegende Kreise in zwei Punkten durchdringen, sich also im $\mathfrak{R}_3$ auseinandernehmen lassen. Ebenso lässt sich im $\mathfrak{R}_5$ die doppelt überdeckte Ringfläche trennen. Daher ist für diese Figur:

$$z_1 = P_1 = 5.$$

§ 18. Zwei complexe Variabele.

48. Sollen y und z alle complexen Werte annehmen, so führt eine analoge Construction im $\mathfrak{R}_5$ von einer Ebene $\mathfrak{E}_2^{(y)}$ (für welche $z = 0$ ist) und $\mathfrak{E}_2^{(z)}$ (für die $y = 0$ ist), die in einer $\mathfrak{E}_4$ auf einander senkrecht stehen, zu einer Schar von Kugelflächen $\mathfrak{K}_2^{(x)}$ (Meridiankugeln, entsprechend den Meridiankreisen der Ringfläche), die die Werte der x tragen.

Jede derselben hat ihren Nullpunkt auf der kleinsten der ∞^2 Kugelflächen $\mathfrak{K}_2^{(y)}$ (Aequatorialkugeln, entsprechend dem inneren Aequatorialkreise der Ringfläche), ihren ∞-Punkt aber auf der grössten, und steht auf der Ebene $\mathfrak{E}_3$ dieser beiden senkrecht.

Ohne mehrfache Ueberdeckung ist zunächst für diese Fläche $\mathfrak{F}_4$:

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 3, \quad P_3 = 1.$$

Bei mehrblättrigen Meridiankugeln bilden deren Verzweigungspunkte Flächen $\mathfrak{V}_2$, zwischen denen Verzweigungsschnitte $\mathfrak{V}_3$ geführt werden können.

Aus der Möglichkeit derartiger Darstellungen schliessen wir, dass die Kenntniss der 4-dimensionalen Gebilde zur Förderung der Theorie der Functionen zweier Veränderlichen beizutragen geeignet ist.

§ 19. Geschlossene Gebilde aus Polyedern.

49. Die $p-1$-dimensionalen Grenzflächen von Polyedern $\mathfrak{P}_{p-1}$, die einen p-dimensionalen Raum einschliessen, lassen sich im $\mathfrak{R}_{p+1}$ so aneinanderlegen, dass dieser Raum in gewissem Sinne ein p-dimensionales geschlossenes Gebilde wird. Wir zählen jetzt die niedrigsten Fälle durch Beispiele auf.

50. Erstes Beispiel. Nimmt man die Werte der reellen Variabeln y modulo 2π, betrachtet also zwei um 2π entfernte Punkte der sie tragenden Geraden als nicht verschieden, so stellt letztere ein geschlossenes Gebilde $\mathfrak{G}_1$ dar. Geometrisch anschaulich wird der Zusammenschluss allerdings erst in der Ebene $\mathfrak{R}_2$, in der wir eine Strecke 2π zum Kreise biegen können, bei dessen Umlauf wir auf dieselben Punkte zurückkommen, wenn uns die Gerade nur congruente darbieten würde.

Die Grösse $u = \sin y$ z. B. nimmt ihre sämtlichen Werte auf dieser Strecke 2π zweimal an, und zwar die Werte $+1$ und -1 je in zwei zusammenfallenden Punkten. Durch Deformation des Kreises in zwei einander unendlich nahe Halbkreise (s. Fig. 10) lassen sich die Punkte mit gleichem u zusammenlegen, so dass wir jetzt ein Gebilde $\mathfrak{G}_1$ vor uns haben, welches die Werte $(u, \sqrt{1-u^2})$

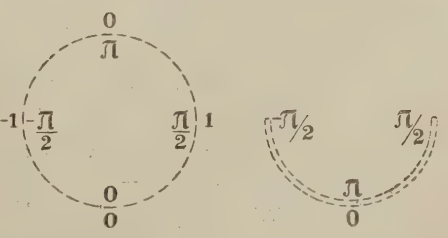

Fig. 10.

trägt, soweit sie definiert sind, entsprechend der Formel:

$$y = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Für $\mathfrak{G}_1$ lässt sich noch die (uneigentliche) Betti'sche Zahl aufstellen: $P_0 = 3$.

51. Zweites Beispiel. Die Function

$$u = f(y, z) = \sin y + \alpha \sin z$$

zweier reellen Veränderlichen y, z mit einem unbestimmten Parameter α besitzt ein Periodenquadrat der Seitenlänge 2π in der y, z-Ebene (I). Letztere schliesst sich zur Ringfläche, wenn wir die Variabeln modulo 2π auffassen (II). Anschaulich machen lässt sich dies im $\mathfrak{R}_3$ durch Biegung des Quadrats $ABDC$, erst bis zur Coincidenz der Kanten $AB = CD$, dann des entstandenen Cylinders, bis BD auf AC fällt.

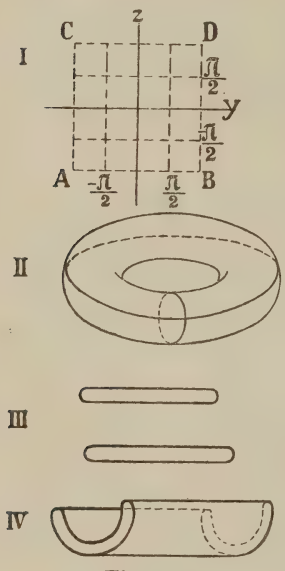

Fig. 11.

Die gleichen Werte, die u in zwei Punkten auf jeder Parallelen zu AB annimmt, können durch Einstülpung des Cylinders unter Festhaltung der Kreise $u = \pm 1 + \alpha \sin z$ zusammengelegt werden (Querschnitt davon in Fig. 11 III), ebenso die gleichen Werte auf Parallelen zu AC in ähnlicher Weise, wie im ersten Beispiel (Fig. 11 IV). Das Ganze lässt sich noch zu einer 4fach überdeckten Halbkugel deformieren.

Am fertigen Ringe lassen sich, ohne zeitweilig Doppelpunkte einzuführen, diese letzteren Deformationen erst im $\mathfrak{R}_5$ bewerkstelligen.

Der Ring aber genügt zur Feststellung der Betti'schen Zahl: $P_1 = 3$.

52. Drittes Beispiel. Auch der lemniscatischen Function einer complexen Variabeln z:

$$u = \wp(z), \quad z = \tfrac{1}{2}\int_0^u \frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}}$$

entspricht in der z-Ebene ein Periodenquadrat mit den Seiten:

$$2\omega_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \Gamma(\tfrac{1}{4})^2 \quad \text{und} \quad 2\omega_3 = 2i\omega_1.$$

Wieder nehmen wir die z-Werte modulis $2\omega_1$, $2\omega_3$ und erhalten eine

Ringfläche wie im zweiten Beispiel. Zieht man noch die Mittellinien des Quadrats und markiert dadurch die Punkte $z = 0, \omega_1, \omega_3, \omega_1 + \omega_3$, wo $\wp(z) = \infty, 1, -1, 0$ ist, so kann man den Ring so herstellen, dass man das Rechteck $3+4$ (s. Fig. 12, I) auf $2+1$ um FH umklappt (Fig. 12, II), dann $CD = AB$ miteinander vereinigt, dann 3, 2 um JG, JE auf 4 legt (Fig. 12, III), so dass die Ordnung der Teile 2, 3, 4, 1 wird, und dann noch $BFD = AHC$ miteinander verschmilzt.

Schnitte man vor der Verschmelzung $BD = AC$ längs JE auf und klappte 2 um JF auf die andere Seite von 3 (Fig. 12, IV), so entstände bei der Verschmelzung der Kanten $AH = BF$, $HC = FD$, $AEB = CGD$ eine Doppelfläche, die sich zur zweiblättrigen Kugelfläche mit den Verzweigungsschnitten AH und EJ deformieren lässt. Letztere verbinden die Werte $u = \infty, -1$ einerseits und $u = 1, \infty$ andrerseits (s. Fig. 12, V).

Natürlich lässt sich auch die Ringfläche selbst im $\mathfrak{R}_3$ so deformieren, dass sie eine zweiblättrige Halbringfläche (mit geschlossenen Enden) wird, die längs AH und EJ verzweigt ist und sich ersichtlich zur Kugel deformieren lässt. Auf der Ringfläche ergiebt sich wieder die Betti'sche Zahl $P_1 = 3$, also das Geschlecht $\frac{P_1 - 1}{2} = 1$, wie die Function es verlangt.

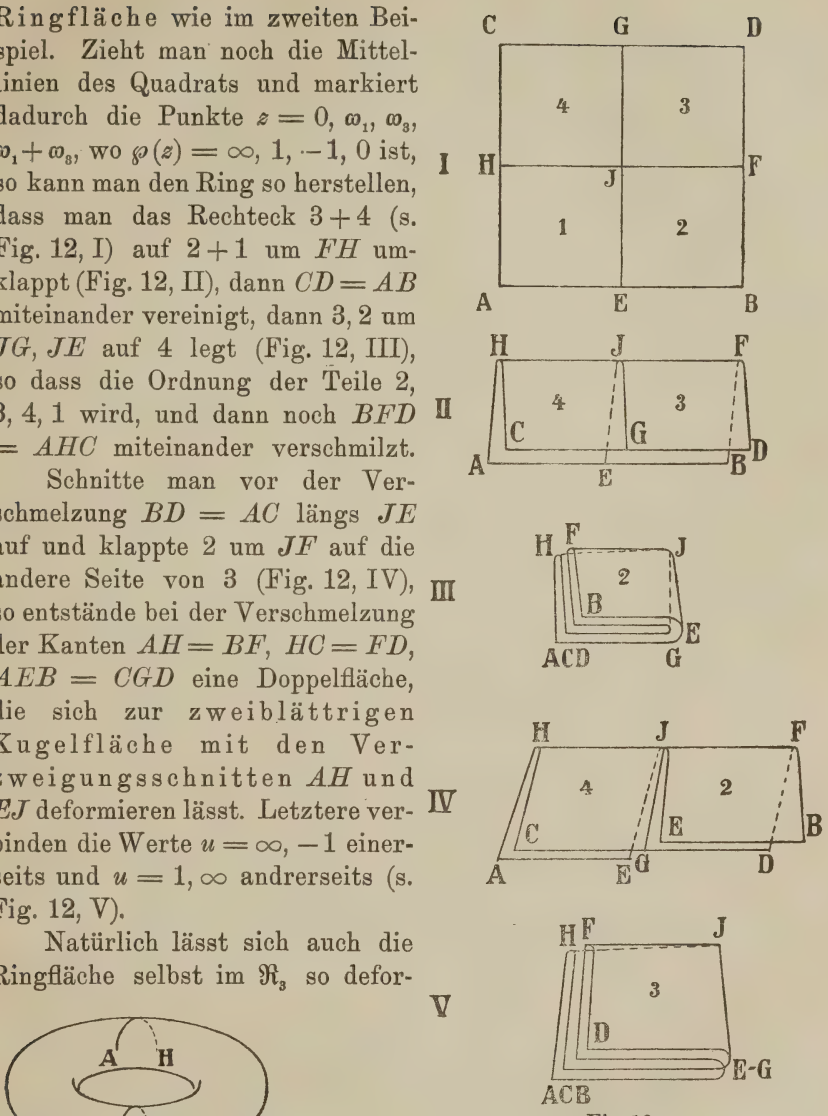

Fig. 12.

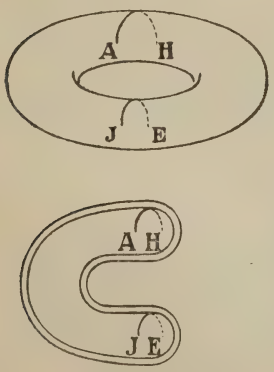

Fig. 13.

53. Das Quadrat. Betrachtet man aus Anlass dieser functionentheoretischen Beziehungen nun auch eine allgemeine Einteilung der y, z-Ebene in Quadrate, so geht dieselbe unter Festhaltung der Seitenrichtungen aus dem Fundamentalquadrat mit den Ecken $0,0;\ 0,1;\ 1,0;\ 1,1$ etwa vermöge der durch

$$y' = \pm y + \beta \qquad y' = y + 1$$
$$z' = z + 1 \qquad z' = z$$

erzeugten discontinuirlichen Gruppe hervor, wobei $0 \leqq \beta < 1$ und $\pm$ ein bestimmtes Vorzeichen sei. Für $\beta = 0$ stehen die Quadrate ebenso nebeneinander, wie in obigen Beispielen.

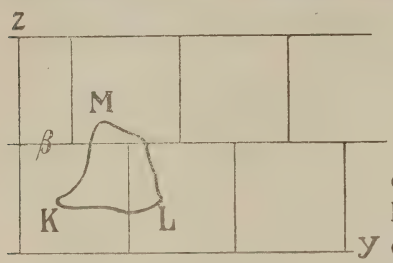

Fig. 14.

Ein geschlossenes Gebilde erhalten wir wieder, wenn wir die aus einem beliebigen Punkte durch unsere Gruppe erzeugten Punkte als nicht verschieden betrachten (z. B. die Punkte K, L, M). Für die drei möglichen nicht paarweise ineinander deformierbaren Verbindungen der Punkte $K \equiv L \equiv M$ ist $LM \equiv LK + KM$, woraus folgt, dass diese Linien auch auf der aus einem Quadrate zu bildenden Fläche ein Gebiet abgrenzen. Also besteht auch die Homologie $LM + MK + KL \sim 0$. Eine solche Homologie besteht für je drei Umläufe $k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3$, die sich stets, wie geschrieben, aus den genannten ($C_1 = LM$, $C_2 = MK$, $C_3 = KL$) zusammensetzen lassen. Daher $P_1 = 3$.

Wir erhalten eine Ringfläche, die sich leicht durch Brechen des Quadrats um eine zur z-Axe parallele Mittellinie, dann um eine zur y-Axe parallele Mittellinie, Zusammenheften der entsprechenden Ränder und stetige Deformation herstellen lässt.

Hat y in der ersten Substitution das negative Zeichen, so führt die letzte Art, das Quadrat zu brechen, für sich auf das Möbius'sche Blatt. Der Ring kann sich dann nicht schliessen, ohne sich zu durchdringen. Er bildet deshalb kein Gebilde $\mathfrak{G}_2$ nach dessen früherer Definition. Bei Poincaré werden derartige Fälle ausgeschlossen.

§ 20. Der Würfel.

54. Geht man von dem Würfel mit den Ecken $0,0,0;\ 0,0,1;\ 0,1,0;\ 1,0,0;\ 1,1,0;\ 1,0,1;\ 0,1,1;\ 1,1,1$ aus, so wird man, wenn bei einer Raumeinteilung wenigstens 4 Kanten jeder Zelle der einen Axe parallel, die anderen darauf senkrecht bleiben sollen,

insbesondere zu der durch die Substitutionen:

$$\begin{array}{lll} x' = x+1 & x' = x & x' = \alpha x + \beta y \\ y' = y & , \quad y' = y+1, & y' = \gamma x + \delta y, \\ z' = z & z' = z & z' = z+1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ sind ganze Zahlen} \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Gruppe geführt. Zur x, z-Ebene parallele Ebenen im Abstande 1 voneinander sind in congruente Parallelogramme geteilt, die auf allen dem gleichen Punktgitter angehören. Auf jedem Parallelogramm erhebt sich ein Parallelepiped von der Höhe 1.

Alle aus den Punkten des Anfangswürfels durch die Substitutionen unserer Gruppe hervorgehenden Punkte sind uns wieder aequivalent. Insbesondere mögen aus dem Punkte K darch die erzeugenden Substitutionen in benachbarten Parallelepipeden die Punkte L, M, N entstehen. Ziehen wir Verbindungen von K mit L, M, N, die nur im Anfangswürfel und der Zelle verlaufen, der je einer der Punkte L, M, N angehört, so repräsentieren diese Verbindungen C_1, C_2, C_3 geschlossene Linien derart, dass sich offenbar jeder andere geschlossene Weg aequivalent mit einem Ausdruck der Form $k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 + k_1' C_1 + k_2' C_2 \ldots$ erweisen muss.

Man erkennt auch sofort die Aequivalenzen

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &\equiv C_2 + C_1, \\ C_1 + C_3 &\equiv C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2, \\ C_2 + C_3 &\equiv C_3 + \beta C_1 + \delta C_2 \end{aligned}$$

(C_1 führt vom Gitterpunkt 0, 0, 0 zu 1, 0, 0; C_2 zu 0, 1, 0; C_3 führt von 0, 0, 0 zu 0, 0, 1, von 1, 0, 0 aber zu $\alpha, \gamma, 1$; αC_1 führt von 0, 0, 1 zu $\alpha, 0, 1$; γC_2 von 0, 0, 1 zu $0, \gamma, 1$; $C_1 + C_3$ von 0, 0, 0 zu $\alpha, \gamma, 1$, ebenso $C_3 + \alpha C_1 + \gamma C_2$, u. s. w.).

55. Aus diesen Grundaequivalenzen ergeben sich wieder die Grundhomologieen mit commutativer Addition:

$$\begin{aligned} (\alpha - 1) C_1 + \gamma C_2 &\sim 0 \\ \beta C_1 + (\delta - 1) C_2 &\sim 0, \end{aligned}$$

woraus entweder: $C_1 \sim C_2 \sim 0$, ausserdem besteht C_3, also $P_1 = P_2 = 2$, oder:

$$\begin{vmatrix} \alpha - 1, & \gamma \\ \beta \ , & \delta - 1 \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. $\alpha + \delta = 2$, aber nicht $\alpha = \delta = 1$, dann sind z. B. C_1 und C_3 unabhängig: $P_1 = P_2 = 3$, oder endlich: $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, dann unterliegen C_1, C_2 keiner Bedingung, und es sind C_1, C_2, C_3 unabhängig, also $P_1 = P_2 = 4$.

56. Geometrische Veranschaulichung im Raume $\mathfrak{R}_4$.

1) Die letzte Lösung verlangt eine Zusammenheftung der Seiten des Würfels, wie sie den Gleichungen:

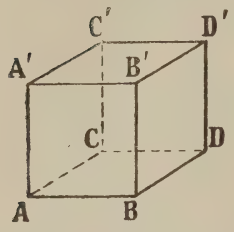

Fig. 15.

$$ABDC = A'B'D'C'$$
$$AA'B'B = CC'D'D$$
$$ACC'A' = BDD'B'$$

entspricht. Alle Ecken fallen dabei auf einander, ebenso je 4 parallele Kanten. Wie beim Uebergang vom Parallelogramm zur Ringfläche zwei neue Zusammenhänge geschaffen wurden, so hier drei, den Gegenseitenpaaren entsprechend.

(Analog entsteht durch Zusammenheften der Gegenwürfelpaare des Biquadrats (a^4) nach Biegung ohne Torsion im $\mathfrak{R}_5$ ein Gebilde $\mathfrak{G}_4$, für welches $P_1 = P_3 = 5$, $P_2 = 1$ ist).

2) Setzt man $\alpha = \delta = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, so sind die Würfelflächen nach dem Schema zu verheften:

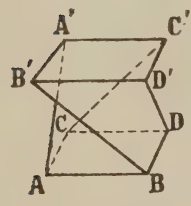

Fig. 16.

$$ABDC = B'D'C'A'$$
$$ABB'A' = CDD'C'$$
$$ACC'A' = BDD'B',$$

wobei alle Ecken zusammenfallen, die Kanten zu vieren. Die Figur zeigt die Torsion, die durch Drehung von $ABDC$ um die Aussennormale um $\frac{\pi}{2}$ im Sinne des Uhrzeigers entstanden ist. Es wird $P_1 = P_2 = 2$.

3) Führt man dieselbe Drehung auch mit den Quadraten $CDD'C'$, $BDD'B'$ aus, schreibt also:

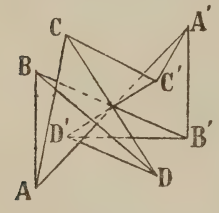

Fig. 17.

$$ABDC = B'D'C'A'$$
$$ABB'A' = C'CDD'$$
$$ACC'A' = DD'B'B,$$

so wird für die entsprechenden geschlossenen Bahnen C_1, C_2, C_3:

$$C_1+C_2+C_3 \equiv 0,\quad C_1-C_2-C_3 \equiv 0,\quad C_2-C_3-C_1 \equiv 0,\quad C_3-C_1-C_2 \equiv 0,$$

oder:

$$2C_1 \equiv 2C_2 \equiv 2C_3,\quad 4C_1 \equiv 0,$$

also:

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim 0 \text{ und } P_1 = P_2 = 1.$$

Die 8 Substitutionen dieser Gruppe entsprechen den Wegen:

$$0,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ 2C_1,\ 3C_1,\ 3C_2,\ 3C_3.$$

§ 21. Torsionscoefficienten.

57. Die Beispiele 2) und 3) geben Veranlassung, sich über die Torsion der aus dem Zusammenschluss von Polyedern entstandenen Gebilde $\mathfrak{G}_p$ Rechenschaft zu geben. Im dritten Beispiel kommen drei Flächen (d. h. verschmolzene Flächenpaare) f_1, f_2, f_3 vor, dazu vier Kanten, nämlich:

$$k_1 = AB = B'D' = C'C, \quad k_2 = AC = DD' = B'A',$$
$$k_3 = AA' = C'D' = DB, \quad k_4 = CD = BB' = A'C'$$

und zwei Eckpunkte:

$$e_1 = A = B' = C' = D, \quad e_2 = B = D' = A' = C.$$

Wir stellen nun im allgemeinen Falle, dass die Polyeder $\mathfrak{a}_p^1, \mathfrak{a}_p^2 \ldots$, deren sämmtliche Grenzen zweiseitig und einfach zusammenhängend sind, durch Verheften ihrer Seiten zu den Flächen $\mathfrak{a}_{q-1}^1, \mathfrak{a}_{q-1}^2 \ldots$, u. s. w. ein geschlossenes Gebilde $\mathfrak{G}_p$ (zugleich mit einer Karte $\mathfrak{K}$) ergeben, folgendermassen Matrices M_q auf:

Für jedes Gebiet $\mathfrak{a}_q$ legen wir eine Zeile, für jedes Grenzgebiet $\mathfrak{a}_{q-1}$ eine Colonne an. Dann tragen wir die Elemente ε_{ij}^q ein, die $= 1, -1$ oder 0 sein sollen, jenachdem zwischen $\mathfrak{a}_q^i$ oder $\mathfrak{a}_{q-1}^j$ linke, rechte oder keine Begrenzung vorliegt. (Bei linker Begrenzung liegt unmittelbar zur Linken der Grenze begrenztes Gebiet. Die linke Indicatrix ist dabei für jedes Gebiet fest gewählt, ebenso die linke Seite, wo diese Wahl dann noch frei steht. Liegt links und rechts eines $\mathfrak{a}_{q-1}$ das Gebiet $\mathfrak{a}_q$, so ist $\mathfrak{a}_{q-1}$ keine Grenze von $\mathfrak{a}_q$.)

M_q	$\mathfrak{a}_{q-1}^1$	$\mathfrak{a}_{q-1}^2$	$\ldots$
$\mathfrak{a}_q^1$	ε_{11}^q	ε_{12}^q	$\ldots$
$\mathfrak{a}_q^2$	ε_{21}^q	ε_{22}^q	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

;

im dritten Beispiele:

M_1	e_1	e_2
k_1	-1	$+1$
k_2	-1	$+1$
k_3	-1	$+1$
k_4	$+1$	-1

M_2	k_1	k_2	k_3	k_4
f_1	-1	$+1$	$+1$	$+1$
f_2	-1	$+1$	-1	$+1$
f_3	$+1$	$+1$	-1	-1

M_3	f_1	f_2	f_3
$\mathfrak{a}_2$	0	0	0

58. Ein geschlossener Zug auf einer dieser Matrices, der schrittweise zu benachbarten Elementen, abwechselnd derselben Colonne und derselben Zeile führt, berührt gewisse ε_{ij}^{q}, deren Product $= 0, +1$, oder -1 ausfallen wird. Kommt letzterer Fall vor, so nennen wir die Matrix einseitig, denn auf geschlossenem Wege auf $\mathfrak{G}_p$ von Gebiet $\mathfrak{a}_q$ zu $\mathfrak{a}_q$ durch die den berührten ε_{ij}^{q} entsprechenden Grenzen $\mathfrak{a}_{q-1}$ hindurch kehrt sich für jedes $\varepsilon_{ij}^{q} = -1$ die Indicatrix einmal um. Sie würde also bei der Rückkehr zum Ausgangspunkte die entgegengesetzte sein.

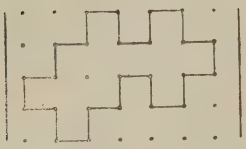

Fig. 18.

59. Multiplicieren wir eine beliebige Matrix M_q, deren Elemente hierzu nur ganzzahlig, und zwar mit dem grössten gemeinschaftlichen Teiler t_1 angenommen werden sollen, und welche μ Zeilen, $\mu + \nu$ Colonnen habe, links mit einer μ-reihigen aus ganzzahligen Elementen gebildeten Determinante vom Werte 1:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \dots & \alpha_{\mu\mu} \end{vmatrix} = 1,$$

so können wir es durch passende Wahl der α_{ij} erreichen, dass t_1 schon für die Elemente der ersten Zeile der grösste gemeinsame Teiler wird. Durch weitere Multiplication rechts mit einer $\mu + \nu$-reihigen ganzzahligen Determinante vom Werte 1:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{1,1} & \dots & \gamma_{1,\mu+\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\mu+\nu,1} & \dots & \gamma_{\mu+\nu,\mu+\nu} \end{vmatrix} = 1,$$

deren Elemente γ_{ij} geeignet zu wählen sind, lässt sich dann in der ersten Zeile das erste Element auf t_1, die übrigen auf 0 bringen. Da dann in der ersten Colonne nur Multipla von t_1 stehen, so werden auch deren Elemente durch Abziehen der geeignet vervielfachten ersten Zeile von den folgenden zu 0, ausser dem ersten, wir erhalten also die Matrix nun in der Gestalt

$$M_q = \begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \eta_{22} & \eta_{23} & \dots \\ 0 & \eta_{32} & \eta_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix};$$

im Beispiele wird

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Auf die Unterdeterminante des ersten Elementes, deren Elemente den grössten gemeinschaftlichen Teiler t_2 haben mögen, wenden wir wieder dasselbe Verfahren an, usw.

Schliesslich erhalten wir eine Matrix, die nur an den Stellen, wo die i-Zeile die i-te Colonne kreuzt (in der Hauptdiagonale) die Zahl t_i, sonst nur Nullen stehen hat. Offenbar war von vornherein das Product $t_1 t_2 \dots t_i$ der grösste gemeinsame Teiler der i-reihigen Determinanten von M. Die Grössen t_i können noch von einer bestimmten ab verschwinden, wenn wir als grössten gemeinsamen Teiler von lauter Nullen die Null selbst bezeichnen.

60. Wenden wir nun dieses Verfahren auf die Matrices M_q an, die wir für das Gebilde $\mathfrak{G}_p$ aufgestellt hatten, so nennen wir diejenigen Grössen t_i, die dabei grösser als 1 ausfallen, Torsionscoefficienten des Gebildes $\mathfrak{G}_p$. Im Beispiele wird:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = t_3 = 2.$$

§ 22. Anzahl unabhängiger Grenzenzüge.

61. Aus M_q in seiner ursprünglichen Fassung liessen sich unmittelbar Homologieen ablesen, da jede Zeile die Coefficienten gab, mit denen die Gebiete $\mathfrak{a}_{q-1}$ zu versehen waren, um ihr Aggregat zur vollständigen Begrenzung des der Zeile entsprechenden Gebietes $\mathfrak{a}_q$ zu machen; so wird jedesmal

$$\sum_j \varepsilon_{ij}^q \mathfrak{a}_{q-1}^j \sim 0.$$

Diese Homologieen brauchten nicht voneinander unabhängig zu sein. Jetzt sind dagegen die mit den t_i zu bildenden Homologieen sicher unabhängig. Sie beziehen sich aber nicht mehr unmittelbar auf die bisher den Colonnen entsprechenden Gebiete $\mathfrak{a}_{q-1}$, da vermöge obiger Operationen in den Homologieen, die nur für die $\mathfrak{a}_{q-1}$ gelten, letztere durch lineare Verbindungen

$$\mathfrak{b}^j_{q-1} = \sum_k \lambda_{jk} \mathfrak{a}^k_{q-1}$$

ersetzt wurden. Die Auflösung dieser Gleichungen ergebe

$$\mathfrak{a}^i_{q-1} = \sum_j \varkappa_{ij} \mathfrak{b}^j_{q-1},$$

so dass

$$\sum_j \varkappa_{ij} \lambda_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ für } k = i \\ 0 \quad " \quad k \neq i \end{cases}$$

wird. Damit also die aus der Matrix M_q abzulesenden Homologieen in der neuen Gestalt von M_q gültig seien, müssen wir den Colonnen von M_q in der ursprünglichen Gestalt die Verbindungen entsprechen lassen:

$$\sum_j \varkappa_{ij} \mathfrak{b}^j_{q-1}.$$

Den Zeilen entsprechen ebenfalls lineare Verbindungen

$$\mathfrak{b}^j_q = \sum_j \varrho_{jk} \mathfrak{a}^k_q,$$

die aber die Homologieen nicht fälschen, da es erlaubt ist, Homologieen zu addieren. Wir lassen dieselben also stehen.

62. Ist $t_{i+1} = 0$, so sind die Verbindungen $\mathfrak{b}^{i+1}_q$, $\mathfrak{b}^{i+2}_q$ ... unbegrenzte, d. h. auf $\mathfrak{G}_p$ geschlossene Züge von q-dimensionalen Gebieten. Es gebe deren ξ_q, also

$$\mathfrak{b}^{i+\nu}_q \equiv 0 \qquad (\nu = 1, 2 \ldots \xi_q).$$

Dagegen werden

$$\mathfrak{b}^1_q,\ \mathfrak{b}^2_q \ldots \mathfrak{b}^i_q \quad \text{je von} \quad t_1 \mathfrak{b}^1_{q-1},\ t_2 \mathfrak{b}^2_{q-1} \ldots t_i \mathfrak{b}^i_{q-1}$$

begrenzt, so dass wir die Homologieen haben:

$$t_\nu \mathfrak{b}^\nu_{q-1} \sim 0 \qquad (\nu = 1, 2 \ldots a_q - \xi_q);$$

die Anzahl der $\mathfrak{a}_q$ bezeichnen wir mit a_q. Erst der t_ν-mal durchlaufene Grenzenzug $\mathfrak{b}^\nu_{q-1}$ bildet also die vollständige Begrenzung eines Gebietes $\mathfrak{a}_q$, wie im Beispiel 3) der Zug $4C_1 \sim 0$.

63. Wirft man alle einander homologen Grenzenzüge in eine Klasse, und ist h die Anzahl der so entstehenden Klassen, so wird $\frac{h}{t_1 t_2 \ldots t_i}$ die Anzahl derjenigen unter ihnen sein, die noch getrennt bleiben, wenn man ohne den Factor t_ν schreibt: $\mathfrak{b}^\nu_{q-1} \sim 0$, wie wir es zur Bestimmung der Betti'schen Zahl taten. Uebrigens liegt hierin der Unterschied zwischen Poincaré's Definition der Betti'schen Zahlen, der wir hier gefolgt sind, und einer früheren, die von Betti selbst herrührt.

Poincaré's auf Seite 23 u. ff. definierte Betti'sche Zahl P_{q-1} giebt also die Zahl ξ_{q-1} der geschlossenen Züge, die wir uns aus der Matrix M_q verschaffen, vermindert um die Anzahl der zwischen ihnen bestehenden Homologieen weniger eins (da einer von den homologen Zügen stehen bleibt):

$$P_{q-1} = \xi_{q-1} - (a_q - \xi_q).$$

64. Stellt man für die zu $\mathfrak{R}$ reciproke Einteilung $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{G}_p$, bei der Gebiete a'_{p-q} den a_q entsprechen, die Matrices M'_q auf, so sind diese die transponierten M_{p+1-q}. Auch die Gebiete dieser Einteilung sind einfach zusammenhängend und zweiseitig. Von der speciellen Einteilung können aber die Torsionscoefficienten nicht abhängen, sonst könnten die Homologieen (die sich auf einfache Grenzenfolgen auf $\mathfrak{G}_p$ mit Zahlenfactoren beziehen), nicht beide Male gleichwertig ausfallen. Es sind daher die Torsionscoefficienten aus M_q gleich denen aus M'_q und diese wieder gleich denen aus M_{p+1-q}.

65. Hat ein Gebilde $\mathfrak{G}_p$ nur zweiseitige Matrices und sind seine Betti'schen Zahlen sämtlich $= 1$ sowie auch die aller eingreifenden Gebilde, so lässt es sich zur p-dimensionalen Kugelfläche $\mathfrak{K}_p$ stetig deformieren, da sich jedes geschlossene Gebilde $\mathfrak{g}_q$ auf $\mathfrak{G}_p$ in eine Grenzenfolge des Polyeders, das die Matrices ergab, also in jedes andere Gebilde $\mathfrak{g}_q$ derselben Art deformieren lässt. Dann sind aber alle Zusammenhangszahlen $z_q = 1$.

§ 23. Beispiel eines vierdimensionalen Gebildes.

66. Ist w mit den complexen Variabeln y, z durch die algebraische Relation verbunden:

$$w^8 - 2w^4[y^3 - y + \alpha^2(z^3 - z)] + [y^3 - y - \alpha^2(z^3 - z)]^2,$$

oder

$$w = \sqrt{\sqrt{y^3 - y} + \alpha\sqrt{z^3 - z}}$$

so werden behufs Construction des Gebildes $\mathfrak{G}_4$ zunächst die zweiblättrigen Kugelflächen $\mathfrak{K}_2^{(y)}$ für $(y, \sqrt{y^3 - y})$ und $\mathfrak{K}_2^{(z)}$ für $(z, \sqrt{z^3 - z})$ zu bilden sein. Jedem Punkte der ersteren soll dann eine Fläche nach Art der letzteren entsprechen. Die Kugelfläche für $(y, \sqrt{y^3 - y})$, $\mathfrak{K}_2^{(y)}$, denken wir uns durch zwei Schnitte, deren Ränder i_r^y, j_l^y, i_l^y, j_r^y seien, einfach zusammenhängend gemacht und zu einem Quadrat mit den Ecken e_{rr}^y, e_{rl}^y, e_{lr}^y, e_{ll}^y deformiert. (Fig. 19). Dasselbe ge-

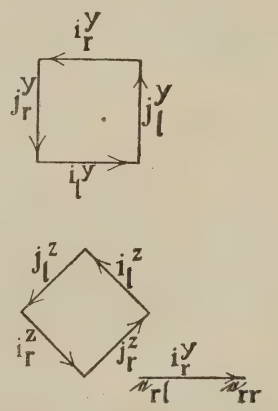

Fig. 19.

schehe mit $\mathfrak{K}_2^{(x)}$. Das aus $\mathfrak{K}_2^{(x)}$ entstandene Quadrat werde nun senkrecht zum vorigen und parallel mit sich so geführt, dass seine Ecke e_{rr}^{x} das aus $\mathfrak{K}_2^{(y)}$ entstandene Quadrat beschreibe.

Die Tabelle:

	$\mathfrak{K}_2^{(y)}$	i_r^y	i_l^y	j_r^y	j_l^y	e_{rr}^y	e_{rl}^y	e_{lr}^y	e_{ll}^y
$\mathfrak{K}_2^{(x)}$	a_4	a_3^1	a_3^2	a_3^3	a_3^4	a_2^1	a_2^2	a_2^3	a_2^3
i_r^x	b_3^1	c_2^1	c_2^2	c_2^3	c_2^4	a_1^1	a_1^2	a_1^3	a_1^4
i_l^x	b_3^2	c_2^5	c_2^6	c_2^7	c_2^8	a_1^5	a_1^6	a_1^7	a_1^8
j_r^x	b_3^3	c_2^9	c_2^{10}	c_2^{11}	c_2^{12}	a_1^9	a_1^{10}	a_1^{11}	a_1^{12}
j_l^x	b_3^4	c_2^{13}	c_2^{14}	c_2^{15}	c_2^{16}	a_1^{13}	a_1^{14}	a_1^{15}	a_1^{16}
e_{rr}^x	b_2^1	b_1^1	b_1^2	b_1^3	b_1^4	a_0^1	a_0^2	a_0^3	a_0^4
e_{rl}^x	b_2^2	b_1^5	b_1^6	b_1^7	b_1^8	a_0^5	a_0^6	a_0^7	a_0^8
e_{lr}^x	b_2^3	b_1^9	b_1^{10}	b_1^{11}	b_1^{12}	a_0^9	a_0^{10}	a_0^{11}	a_0^{12}
e_{ll}^x	b_2^4	b_1^{13}	b_1^{14}	b_1^{15}	b_1^{16}	a_0^{13}	a_0^{14}	a_0^{15}	a_0^{16}

giebt die Gebilde an, die die Gebiete von $\mathfrak{K}_2^{(x)}$ dabei längs der Gebiete von $\mathfrak{K}_2^{(y)}$ erzeugen. Dabei können $\mathfrak{K}_2^{(y)}$ und $\mathfrak{K}_2^{(x)}$ die Rollen vertauschen.

Nennen wir die Grenzen des entstehenden vierdimensionalen Polyeders a_4:

$$a_3^1,\quad a_3^2,\quad a_3^3,\quad a_3^4;\qquad b_3^1,\quad b_3^2,\quad b_3^3,\quad b_3^4,$$

so sind dieselben nach folgendem Schema zu verheften:

$$-a_3^2 = a_3^1,\quad -a_3^4 = a_3^3,\quad -b_3^2 = b_3^1,\quad -b_3^4 = b_3^2.$$

Da ferner die Ränder des Quadrats mit entgegengesetzter Indicatrix aneinanderzuheften sind, ist:

$$\begin{aligned} +c_2^1 &= +c_2^6 = -c_2^2 = -c_2^5,\\ +c_2^3 &= +c_2^8 = -c_2^4 = -c_2^7,\\ +c_2^9 &= +c_2^{14} = -c_2^{10} = -c_2^{13},\\ +c_2^{11} &= +c_2^{16} = -c_2^{12} = -c_2^{15}, \end{aligned}$$

Der Würfel a_3^1, der entsteht, indem $\mathfrak{K}_2^{(x)}$ längs i_r^y läuft, hat zu Seiten die Quadrate:

$$+a_2^2,\quad c_2^1,\quad c_2^9,\quad c_2^5,\quad c_2^{13},\quad -a_2^1,$$

der Würfel b_3^1:

$$+b_2^2,\quad c_2^1,\quad c_2^3,\quad c_2^2,\quad c_2^4,\quad -b_2^1$$

und der Würfel $-\mathfrak{a}_3^2$:

$$-\mathfrak{a}_2^3,\quad \mathfrak{c}_2^2,\quad \mathfrak{c}_2^{10},\quad \mathfrak{c}_2^6,\quad \mathfrak{c}_2^{14},\quad +\mathfrak{a}_2^4.$$

Wegen des Zusammenfallens der vier Ecken e^y wird noch, auf $\mathfrak{G}_4$:

$$\mathfrak{a}_2^1 = \mathfrak{a}_2^2 = \mathfrak{a}_2^3 = \mathfrak{a}_2^4.$$

67. Es ist also gerade jede der Flächen $\mathfrak{c}$ des Würfels $\mathfrak{a}_3^1$ mit der negativen von $-\mathfrak{a}_3^3$ zu vereinigen, woraus man sieht, dass keine Torsion stattfindet. Da auch für die beiden Endflächen $\mathfrak{a}_2^2 = \mathfrak{a}_2^1$ ist, so legt sich der Würfel um $\mathfrak{G}_4$ ähnlich wie ein Meridian einer Ringfläche; der Würfel $\mathfrak{b}_3^1$ aber ähnlich wie ein Aequator. Die vier aus Gegenwürfeln verschmolzenen Würfel machen also gerade ein System nichtzerstückender Querschnitte auf $\mathfrak{G}_4$ aus. Dies bestätigt die schon früher aufgestellte Zahl $P_3 = 5$.

Es ist aber auch $P_1 = 5$. Tatsächlich haben wir wegen des Zusammenfallens der Ecken $\mathfrak{a}_1^1 = \mathfrak{a}_1^2 = \mathfrak{a}_1^3 = \mathfrak{a}_1^4$, so dass nur $\mathfrak{a}_1^1$, $\mathfrak{a}_1^5$, $\mathfrak{a}_1^9$, $\mathfrak{a}_1^{13}$; $\mathfrak{b}_1^1$, $\mathfrak{b}_1^2$, $\mathfrak{b}_1^3$, $\mathfrak{b}_1^4$ verschieden bleiben. Hier ist aber noch (wegen $\mathfrak{i}_r = -\mathfrak{i}_r$): $-\mathfrak{a}_1^5 = \mathfrak{a}_1^1$, $-\mathfrak{a}_1^{13} = \mathfrak{a}_1^9$, $-\mathfrak{b}_1^2 = \mathfrak{b}_1^1$, $-\mathfrak{b}_1^4 = \mathfrak{b}_1^3$. Es bleiben vier sich schliessende unabhängige Curven $\mathfrak{g}_1$, in die geschlossene Gebilde $\mathfrak{g}_3'$ des Restraumes $(\mathfrak{R}_5 - \mathfrak{G}_4)$ eingreifen.

Die Betti'sche Zahl P_2 muss $= 3$ werden, da hier einerseits das Gebilde $\mathfrak{K}_2^{(x)}$ einen Punkt, der sich in seinem Inneren (im $\mathfrak{R}_3$) in fester relativer Lage zu ihm befindet, bei der Bewegung im $\mathfrak{R}_5$ so führen wird, dass er eine geschlossene Fläche $\mathfrak{g}_2'$ beschreibt, andrerseits aber in das Leitgebilde $\mathfrak{K}_2^{(y)}$ eine Fläche $\mathfrak{g}_2'$ eingreift. Wirklich finden wir, dass sich die Flächen $\mathfrak{a}_2^1 = \mathfrak{a}_2^2 = \mathfrak{a}_2^3 = \mathfrak{a}_2^4$ und $\mathfrak{b}_2^1 = \mathfrak{b}_2^2 = \mathfrak{b}_2^3 = \mathfrak{b}_2^4$ je zu einer Ringfläche schliessen, während die vier noch unabhängigen $\mathfrak{c}_2$: $\mathfrak{c}_2^1$, $\mathfrak{c}_2^9$, $\mathfrak{c}_2^{13}$, $\mathfrak{c}_2^{11}$ Flächen werden, die aus einem der Schnitte von $\mathfrak{K}_2^{(x)}$, längs eines der Schnitte von $\mathfrak{K}_2^{(y)}$ bewegt, entstehen, also nichts Neues liefern.

68. Nun entspricht $\mathfrak{G}_4$ erst der Function:

$$w^2 = \sqrt{y^3 - y} + \alpha\sqrt{z^3 - z}.$$

Mit Bezug auf w selbst sind hiervon zwei Exemplare längs der Verzweigungsflächen:

$$\mathfrak{V}_2^1\colon\ (y, \sqrt{y^3 - y}) = -\alpha(z, \sqrt{z^3 - z}),\qquad \mathfrak{V}_2^2\colon\ y = \infty \text{ oder } z = \infty$$

aneinanderzuheften.

$\mathfrak{V}_2^2$ würde als Schnitt die Ringfläche $\mathfrak{G}_4$ ($P_2 = 3$) gerade einfach zusammenhängend machen ($P_2 = 1$). Durch $\mathfrak{V}_2^1$, welches $\mathfrak{V}_2^2$ in $y = \infty$, $z = \infty$ trifft, würde sie dann in zwei dreieckige Stücke

zerfallen ($P_2 = 0$). Bricht man aber $\mathfrak{G}_4$ längs $\mathfrak{B}_2^2$ und $\mathfrak{B}_2^1$, also erstens längs der äusseren Aequatorialkugel und der Meridiankugel bei $y = \infty$, zweitens längs $\mathfrak{B}_2^1$, die sich von $y = \infty$, $z = \infty$ nach $y = 0$, $z = 0$ und zurück einmal durch den Ring windet, so entsteht eine sechzehnfach überdeckte $\mathfrak{G}_4$ mit den drei Ecken $y = \infty$, $z = \infty$; $y = 0$, $z = 0$, wo alle Blätter zusammenhängen, und (übereinanderliegend) $y = \infty$, $z = 0$; $y = 0$, $z = \infty$, wo je acht Blätter verheftet sind. Auf jedem Blatte nimmt w alle seine Werte gerade einmal an. Es bleibt $P_1 = P_3 = 5$, $P_2 = 3$.

Bei Hinzuziehung des Doppelexemplares werden die Bettischen Zahlen

$$P_1 = P_2 = 9, \quad P_3 = 5,$$

da sich die Anzahl der Würfel $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$, der Quadrate $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$ und der Curven $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ verdoppelt.

Dies ändert sich auch nicht, wenn man die beiden Exemplare längs eines Verzweigungsschnittes $\mathfrak{B}_3$ von $\mathfrak{B}_2^1$ nach $\mathfrak{B}_2^2$ übers Kreuz aneinanderheftet, falls man in $\mathfrak{B}_3$ durch die singulären Punkte $y = 0$, $z = 0$, und $y = \infty$, $z = \infty$ hindurch stetigen Zusammenhang annehmen will. Betrachtet man dagegen die beiden Teile von $\mathfrak{B}_3$, die nur in diesen Punkten aneinanderhängen, als getrennt, d. h. als zwei Verzweigungsschnitte, so entsteht ein doppelter dreidimensionaler Zusammenhang zwischen den Exemplaren der $\mathfrak{G}_4$ und es wird

$$P_1 = P_2 = 10, \quad P_3 = 5.$$

Anmerkung zu S. 40, Beispiel 3).

Eine der dort betrachteten isomorphe Gruppe erzeugen die Permutationen von acht Elementen:

(1458) (2367)	entsprechend	C_1
(2468) (3175)	„	C_2
(3478) (1265)	„	C_3.

Inhalt.

Seite

Einleitung 3

Erster Teil. Der n-dimensionale Raum $\mathfrak{R}_n$ 5

§ 1. Aufstellung p-dimensionaler Gebilde im Raume $\mathfrak{R}_n$ 5
§ 2. Indicatrix 6
§ 3. Analytische Fortsetzung der Flächenstücke 8
§ 4. Gebilde $\mathfrak{G}_p$. Ein- und Zweiseitigkeit 10
§ 5. Complementäre Gebilde 11
§ 6. Duale Gebilde 13
§ 7. Inneres und Aeusseres 17
§ 8. Poincaré's Satz über complementäre zweiseitige geschlossene (resp. unbegrenzte Gebilde) 16
§ 9. Ineinandergreifen dualer geschlossener Gebilde 18
§ 10. Aequidimensionale geschlossene zweiseitige Gebilde 20
§ 11. Zusammenhang 21
§ 12. Betti'sche Zahlen 23
§ 13. Beispiele zu den Betti'schen Zahlen 26
§ 14. Betti'sche Zahlen geschlossener Gebilde 28
§ 15. Gruppe G_p des Gebildes $\mathfrak{G}_p$ 29
§ 16. Euler'scher Polyedersatz für $\mathfrak{G}_p$ 30

Zweiter Teil. Vierdimensionale Gebilde 33

§ 17. Zwei reelle Variable 33
§ 18. Zwei complexe Veriable 34
§ 19. Geschlossene Gebilde aus Polyedern 35
§ 20. Der Würfel 38
§ 21. Torsionscoefficienten 41
§ 22. Anzahl unabhängiger Grenzenzüge 43
§ 23. Beispiel eines vierdimensionalen Gebildes 45

Lebenslauf.

Ich, August Ludwig Paul Wernicke, wurde zu Leipzig am 9. Januar 1866 geboren. Nach privater Vorbereitung im elterlichen Hause in Lissabon, wo mein Vater im Jahre 1873 das Amt eines Gesandtschaftspredigers erhielt, wurde ich Michaeli 1882 in die Obersecunda der Königlichen Landesschule zu Pforte aufgenommen, bestand dort die Abgangsprüfung zu Ostern 1885 und bezog die Universität Berlin, um Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Während dieser Studienzeit, die sich (mit Einschluss des Militärjahres) bis zu meiner Uebersiedelung nach Amerika im Jahre 1892 ausdehnte, verdankte ich meine Förderung in der Mathematik wesentlich den Herren Kronecker, Netto und Weierstrass, in der Physik den Herren Helmholtz und Kundt. Ausserdem betrieb ich auch, hauptsächlich infolge dringenden Rates seitens meiner Gymnasiallehrer, unter Leitung der Herren Tobler und Zupitza neusprachliche Studien. Letztere führten zu einer festen Anstellung als Professor der neueren Sprachen am State College of Kentucky, die mich in Amerika festhielt, wo ich auch im Jahre 1898 das Bürgerrecht erwarb.

Um wieder Fühlung mit den neuesten Fortschritten in der Mathematik zu gewinnen, verbrachte ich einen anderthalbjährigen Urlaub auf der Universität Göttingen, wo ich namentlich den Herren Hilbert, Klein und Minkowski viele Anregung verdanke. Vorlesungen von Herrn Professor Minkowski haben mich auch zur Wiederaufnahme meiner Studien in der Analysis Situs veranlasst.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
514W49U C001
UEBER DIE ANALYSIS SITUS MEHRDIMENSIONAL
3 0112 017123602